Pourquoi la primitive $\int e^{z^2}\,\mathrm{d}z$ n'a pas d'expression explicite?

Peng TIAN, Stévy DUBO

20 mai 2014

Résumé

Le but de ce mémoire est de démontrer que la primitive de e^{z^2} n'est pas élémentaire. Pour cela, on développe d'abord une théorie des corps différentiels et leurs extensions. Ensuite on démontre un théorème du à Liouville grâce auquel on pourrait parvenir au résultat. Et on finit par des applications du théorème de Liouville sur d'autres exemples.

1 Introduction

Les fonctions que l'on rencontre le plus souvent sont des fonctions qui s'expriment par composition à l'aide des fonctions polynomiales, de la fonction exponentielle, de la fonction logarithme, des opérations rationnelles (somme, produit, quotient) et des opérations algébriques (telles que les racines n-ièmes). Par exemple, les polynômes, les fractions rationnelles des polynômes, les fonctions trigonométriques ($\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$), les fonctions comme

$$\frac{z^{1995\sqrt[3]{\sin\frac{z^2}{1+z}}}}{e^{\sqrt{\log z}}}, \arctan(z) = \frac{\log(1+iz)-\log(1-iz)}{2i}$$

sont des fonctions élémentaires.

Plus précisément, on peut définir la notation de fonction élémentaire par récurrence :

Definition 1.1. *Les* ***fonctions élémentaires*** *d'un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont des fonctions qui peuvent être construites de la façon suivante :*

1) Les fonctions constantes $z \mapsto a$, la fonction identité $z \mapsto z$ sont des fonctions élémentaires.

2) Si f et g sont des fonctions élémentaires, alors la somme $f+g$, le produit fg, le quotient f/g si $g \neq 0$ sont des fonctions élémentaires.

3) Si f est élémentaire, alors e^f est élémentaire ; $\log(f)$ est élémentaire à condition qu'elle soit bien définie sur Ω.

4) Si $f_0, f_1, \ldots, f_n$ avec $f_n \neq 0$ sont des fonctions élémentaires, alors la solution méromorphe de l'équation polynomiale $f_0 + f_1 y + \cdots + f_n y^n = 0$ sur Ω (si elle existe) est une fonction élémentaire.

Une ***fonction élémentaire*** *définie sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}$ *est la restriction d'une fonction élémentaire définie sur un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *contenant* Ω.

On note $\mathcal{E}(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions élémentaires sur* Ω.

A l'aide des règles de calcul de la dérivation, il est relativement facile de calculer la dérivée d'une fonction élémentaire, aussi compliquée soit-elle, et savoir que sa dérivée est encore élémentaire. Mais le cas devient plus difficile quand on calcule la primitive : on n'a que quelques outils restreints, et loin d'être efficaces (changement de variable, intégration par parties, etc). Par conséquent, la primitive d'une fonction très simple peut être difficilement calculable, par exemple, $\int e^{z^2}\,\mathrm{d}z$.

Le but de ce mémoire est de démontrer que la primitive de e^{z^2} n'est pas élémentaire. Pour cela, on développe d'abord une théorie des corps différentiels et leurs extensions. Ensuite on démontre un théorème du à Liouville grâce auquel on pourrait parvenir au résultat. Et on finit par des applications du théorème de Liouville sur d'autres exemples.

Par la définition, il est clair que toute fonction élémentaire est méromorphe dans un certain ouvert de $\mathbb{C}$, et grâce à la proposition suivante, il suffit de considérer dans le corps des fonctions méromorphes sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$:

Proposition 1.2. *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$*, alors l'ensemble des fonctions méromorphes sur* Ω *est un corps. On le note* $\mathcal{M}(\Omega)$.

Or une fonction méromorphe peut ne pas être élémentaire. Il est donc nécessaire de considérer les sous-corps de $\mathcal{M}(\Omega)$. Pour mettre en jeu les outils algébriques, il est raisonnable de définir plus généralement les corps différentiels.

Definition 1.3. *Une* ***dérivation*** *sur un corps* K *est une application* $D : K \to K$ *satisfaisant à :*

$$\forall u, v \in K, \quad D(u+v) = D(u) + D(v), \;\; D(uv) = D(u)v + D(v)u$$

Un ***corps différentiel*** K *est un corps muni d'une dérivation* D *; on appelle* $K_{cst} = \{u \in K \mid D(u) = 0\}$ *l'ensemble des constantes.*

Example 1.4. *L'ensemble des fonctions constantes d'un ouvert de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *est un corps différentiel avec la dérivation* $D : f \mapsto 0$. *Par isomorphisme, on le note encore* $\mathbb{C}$.

Example 1.5. *L'ensemble des fractions rationnelles des polynômes sur* $\mathbb{C}$ *est un corps différentiel avec la dérivation usuelles. On le note* $\mathbb{C}(z)$

Example 1.6. *L'ensemble des fonctions élémentaires* $\mathcal{E}(\Omega)$ *sur un ouvert connexe* Ω *de* $\mathbb{C}$ *est un corps différentiel avec la dérivation usuelle.*

Example 1.7. *L'ensemble des fonctions méromorphes* $\mathcal{M}(\Omega)$ *sur un ouvert connexe* Ω *de* $\mathbb{C}$ *est un corps différentiel avec la dérivation usuelle.*

Il est évident que $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(z) \subset \mathcal{E}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$. En plus, $\mathbb{C}_{cst} = \mathbb{C}(z)_{cst} = \mathcal{E}(\Omega)_{cst} = \mathcal{M}(\Omega)_{cst} = \mathbb{C}$, c'est une propriété d'un corps différentiel quelconque contenant $\mathbb{C}$ et muni de la dérivation usuel, d'où vient la définition de sur-corps et sous-corps différentiels :

Definition 1.8. *Soit* E *un corps différentiel avec* D *la dérivation sur* E. *Soit* $K \subsetneq E$ *un sous-corps de* E. *On dit que* K *est un* ***sous-corps différentiel*** *de* E *si* K *vérifie* $D(K) \subset K$ *et que* $K_{cst} = E_{cst}$. *On dit aussi que* E *est un* ***sur-corps différentiel*** *ou une* ***extension*** *de* K.

Il faut remarquer que l'on s'intéresse seulement aux extensions «pures» c'est-à-dire les extensions E différentes de K.

Notre but est de chercher la primitive de e^{z^2} dans le corps $\mathcal{E}(\Omega)$ pour un certain Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Il est claire que e^{z^2} étant une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$ admet une primitive dans $\mathcal{M}(\mathbb{C})$, mais cette primitive est-elle dans $\mathcal{E}(\Omega)$? Malheureusement $\mathcal{E}(\Omega)$ est encore tellement compliqué qu'on n'en connaît presque rien. Pourtant grâce à la définition par récurrence des fonctions élémentaires, on peut l'aborder par des extensions de corps différentiel à partir de $\mathbb{C}(z)$.

Dans les parties qui suivent, on suppose que tous les corps différentiels considérés sont commutatifs et contiennent $\mathbb{Q}$. On note K, E des corps différentiels munis de la dérivation D, avec E un sur-corps différentiel de K. On note $K[X]$ l'anneau des polynômes en X sur K, et $K(X)$ le corps des fractions rationnelles de $K[X]$. Si $x \in E$, on note $K(x)$ le plus petit sous-corps de E contenant K et x. K^* désigne $K\backslash\{0\}$. On exprime parfois une fonction par son expression explicite, par exemple, z désigne la fonction identité $f(z) = z$.

Ce mémoire s'inspire prioritairement du document [1], et les exemples dans la section 5 viennent du document [2].

2 Des propriétés élémentaires d'un corps différentiel

D'abord il est nécessaire de voir certaines propriétés élémentaires importantes d'un corps différentiel.

Notons que, la dérivation sur un corps différentiel renvoie à des formules classiques :

1) $\forall u, v \in K^*$, on a
$$\frac{D(uv)}{uv} = \frac{D(u)}{u} + \frac{D(v)}{v}, \quad \frac{D(\frac{u}{v})}{\frac{u}{v}} = \frac{D(u)}{u} - \frac{D(v)}{v}$$
En particuler, on a $D(u)/u = D(v)/v$ si et seulement si $u/v \in K_{cst}$
2) $D(0) = D(1) = 0$
3) $\forall (u, v) \in K \times K^*, D(\frac{u}{v}) = \frac{D(u)v - uD(v)}{v^2}$
4) $\forall (u, n) \in (K \times \mathbb{N}) \cup (K^* \times \mathbb{Z}), D(u^n) = nu^{n-1}D(u)$

En effet, d'après la définition 1.3, on a :

1) $\frac{D(uv)}{uv} = \frac{D(u)v+D(v)u}{uv} = \frac{D(u)}{u} + \frac{D(v)}{v}$, en appliquant cette formule avec $u = x/y, v = y$, on a la deuxième formule de 1). En particulier, $\frac{D(u)}{u} = \frac{D(v)}{v} \Leftrightarrow \frac{D(u)}{u} - \frac{D(v)}{v} = 0 \Leftrightarrow D(u/v) = 0$.
2) $D(0) = D(0+0) = 2D(0)$, donc $D(0) = 0$; $D(1) = D(1\times 1) = 1\times D(1)+1\times D(1) = 2D(1)$, donc $D(1) = 0$.
3) Par 1) et $D(1) = 0$, on a $vD(1/v) = -D(v)/v$, d'où $D(1/v) = -D(v)/v^2$, alors $D(\frac{u}{v}) = D(u)/v + D(1/v)u = D(u)/v - uD(v)/v^2$.
4) Si $u = 0, n \in \mathbb{N}$, alors $D(u^n) = 0 = nu^{n-1}D(u)$, si $u \in K^*, n \in \mathbb{Z}$, par 1), on a $D(u^n)/u^n = nD(u)/u$, donc $D(u^n) = nu^{n-1}D(u)$.

Nous présentons maintenant une propriété importante de la dérivation dans $K[X]$.

Proposition 2.1. *Si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$, on note P^D le polynôme $\sum_{i=0}^{n} D(a_i)X^i$ et P' le polynôme dérivé de P au sens usuel i.e. $P' = \sum_{i=1}^{n} ia_i X^{i-1}$. Pour $u \in K$, on a $D(P(u)) = P'(u)D(u) + P^D(u)$.*

Preuve. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$. Alors on a

$$D(P(u)) = D(\sum_{i=0}^{n} a_i u^i) = \sum_{i=0}^{n} D(a_i u^i) = \sum_{i=0}^{n} (D(a_i)u^i + a_i D(u^i))$$

Or, $D(u^i) = iD(u)u^{i-1}$. D'où,

$$\sum_{i=0}^{n} D(a_i)u^i + \sum_{i=0}^{n} a_i D(u^i) = \sum_{i=0}^{n} D(a_i)u^i + \sum_{i=1}^{n} i a_i D(u)u^{i-1} = P'(u)D(u) + P^D(u).$$

$\square$

Proposition 2.2. *L'ensemble des constantes $K_{cst} = \{u \in K \,|\, D(u) = 0\}$ est un sous-corps de K. On l'appelle donc le sous-corps des constantes. De plus, la dérivation D est $K_{cst}-$linéaire, et on a aussi $\mathbb{Q} \subset K_{cst}$.*

Preuve. Tout d'abord, remarquons que 1 et 0 sont dans K_{cst}. De plus, si $u, v \in K_{cst}$, i.e. $D(u) = D(v) = 0$, alors $D(u + v) = D(u) + D(v) = 0$; $D(u) + D(-u) = D(0) = 0$ donc $D(-u) = 0$; $D(uv) = D(u)v + uD(v) = 0$; si $v \neq 0$, alors $D(u/v) = D(u)/v - uD(v)/v^2 = 0$. On en déduit donc que K_{cst} est un sous-corps de K.

Pour tout $a, b \in K_{cst}$ et $u, v \in K$, on a $D(au + bv) = D(au) + D(bv) = D(a)u + aD(u) + D(b)v + bD(v) = aD(u) + bD(v)$, D est donc $K_{cst}-$linéaire.

K étant un corps contenant $\mathbb{Q}$, alors le plus petit sous-corps de K contenant 0 et 1 est $\mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q} \subset K_{cst}$. $\square$

3 Extensions des corps différentiels et fonctions élémentaires

Cette section consiste à construire l'ensemble des fonctions élémentaires $\mathcal{E}(\Omega)$ à partir de $\mathbb{C}(z)$ par des extensions de corps différentiel.

Lemme 3.1. *Soit E un sur-corps différentiel de K et $v \in E$, alors $K(v)$ est un sur-corps différentiel de K (ainsi un sous-corps différentiel de E) si et seulement si $D(v) \in K(v)$.*

Preuve. Si $K(v)$ est un sur-corps différentiel, il est d'abord un corps différentiel, donc il est nécessaire que $D(v) \in K(v)$. Réciproquement, si $D(v) \in K(v)$, par la définition, il faut vérifier que $D(K(v)) \in K(v)$ et que $K(v)_{cst} = K_{cst} = E_{cst}$. La deuxième propriété est évident, il reste donc de démontrer que $\forall u \in K(v), D(u) \in K(v)$. On considère $U = \{u \in K(v) \,|\, D(u) \in K(v)\}$, alors $K \subset U, v \in U$. De plus pour $x \in U, y \in U \backslash \{0\}$, on a $D(x - y) = D(x) - D(y) \in K(v)$, $D(x/y) = D(x)/y - xD(y)/y^2 \in K(v)$, donc U est un sous-corps de $K(v)$. Or $K(v)$ est le plus petit sous-corps de E contenant K et v, donc $U = K(v)$, i.e. $\forall u \in K(v), D(u) \in K(v)$. $\square$

Par la définition 1.1, si A est un sous-ensemble de $\mathcal{E}(\Omega)$, alors le corps engendré par A est un sous-corps de $\mathcal{E}(\Omega)$(mais pas forcément un sous-corps différentiel). Si K est un sous-corps différentiel de $\mathcal{E}(\Omega)$ et si $u \in K$, alors $K(e^u)$ est encore un sous-corps de $\mathcal{E}(\Omega)$. En plus, comme $D(e^u) = e^u D(u) \in K(e^u)$, par Lemme 3.1, $K(e^u)$ est une extension de K. De même, $K(\log u), K(\sqrt[n]{u})$ sont aussi des sous-corps différentiels de $\mathcal{E}(\Omega)$ et extensions de K, d'où viennent les trois types d'extension de corps différentiel : extension algébrique ; extension logarithmique ; extension exponentielle.

3.1 Extension algébrique et transcendante

Si K est un corps différentiel, si on considère la racine n-ième $v = \sqrt[n]{u}$ d'un élément $u \in K$, alors v est annulé par le polynôme $P = X^n - u \in K[X]$.

Definition 3.2. *Un élément $v \in E$ est dit **algébrique** sur K s'il existe $P \in K[X] \backslash \{0\}$ tel que $P(v) = 0$. Dans le cas contraire, il est dit transcendant.*

Si $P \in K[X]$ est tel que $P(v) = 0$, alors tout multiple de P est annulateur de v. On a l'existence et l'unicité du polynôme minimal de v défini ainsi :

Definition-Proposition 3.3. *Si $v \in E$ est algébrique sur K, alors il existe un unique polynôme unitaire irréductible $M_v \in K[X]$ tel que, pour $Q \in K[X]$, on ait l'équivalence $Q(v) = 0 \Leftrightarrow M_v \mid Q$. On appelle M_v le **polynôme minimal** de x sur K.*

Preuve. La fonction $\varphi : K[X] \to K(v)$ définie par $\varphi(P) = P(v)$ est un morphisme d'anneau, alors $\ker \varphi$ est un idéal de $K[X]$. $v \in E$ est algébrique sur K, par la définition, $\exists P \in K[X] \backslash \{0\}$ tel que $P(v) = 0$, donc $\ker \varphi \neq \{0\}$. Comme $K[X]$ est un anneau principal, $\ker \varphi$ est un idéal principal, il existe donc $M_v \in K[X] \backslash \{0\}$ tel que $\ker \varphi = (M_v)$, on a donc l'équivalence $Q(v) = 0 \Leftrightarrow M_v \mid Q$. Quitte à diviser par le coefficient dominant, on peut supposer que M_v est unitaire.

M_v est irréductible car si $M_v = PQ$, on a $P(v)Q(v) = 0$ donc $P(v) = 0$ ou $Q(v) = 0$, alors $M_v \mid P$ ou $M_v \mid Q$, au moins un de P, Q est de même degré que M_v.

Supposons qu'il existe $\widetilde{M_v} \in K[X]$ unitaire qui engendre $\ker \varphi$, alors $\widetilde{M_v} \mid M_v, M_v \mid \widetilde{M_v}$, on a donc $\widetilde{M_v} = M_v$. $\square$

Par l'existence du polynôme minimal, si $v \in E$ est algébrique sur K, alors on peut déduire que $K(v)$ est un sur-corps différentiel de K. En effet, soit M_v le polynôme minimal de v, on a $0 = D(M_v(v)) = M_v^D(v) + M_v'(v)D(v)$ avec M_v' un polynôme de degré plus petit que le polynôme minimal, donc $M_v'(v) \neq 0$, on a alors $D(v) \in K(v)$, par Lemme 3.1, $K(v)$ est bien un sur-corps différentiel de K.

Definition 3.4. *Un sur-corps différentiel E de K est dit **algébrique** si E est de la forme $E = K(v)$ où v est algébrique sur K. Sinon E est dit **transcendant** sur K.*

Example. *Soit K un sous-corps différentiel de $\mathcal{E}(\Omega)$ et $f_0, \ldots, f_n \in K$ avec $f_n \neq 0$. Supposons que $\exists v \in \mathcal{M}(\Omega)$ tel que $f_0 + f_1 v + \cdots + f_n v^n = 0$, alors $K(v)$ est une extension algébrique de K.*

On peut considérer un sur-corps de K comme un espace vectoriel sur K. De ce point de vue, un sur-corps algébrique de K est de dimension finie.

Proposition 3.5. *Si $E = K(v)$ est un sur-corps algébrique de K, M_v est le polynôme minimal de v et $\deg M_v = n$, alors $K(v) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} K v^i$. Réciproquement, si $E = K(v)$ est de dimension finie sur K, alors v est algébrique sur K.*

Preuve. Par la proposition 3.3, M_v est irréductible sur K, donc $K[X]/(M_v)$ est un corps. Par le théorème d'isomorphisme, le morphisme φ défini dans la proposition 3.3 induit un isomorphisme $\hat{\varphi} : K[X]/(M_v) \to \varphi(K[X])$. Alors $\varphi(K[X]) = \hat{\varphi}(K[X]/(M_v))$ est un corps, il est donc identique à $K(v)$. De plus, $K[X]/(M_v) = \{P \in K[X] \mid \deg P < n\}$, et pour $P \in K[X]/(M_v)$, on a $\hat{\varphi}(P) = P(v)$, d'où

$$K(v) = \hat{\varphi}(K[X]/(M_v)) = \{P(v) \mid P \in K[X] \text{ avec } \deg P < n\} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} Kv^i$$

Réciproquement, si $E = K(v)$ est de dimension n sur K, alors les éléments $1, v, \ldots, v^n$ sont linéairement dépendants, il existe $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, tous ne sont pas nuls, tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i v^i = 0$, v est donc algébrique sur K. □

Il existe des extensions transcendantes, un exemple trivial est $\mathbb{C}(z)$ sur $\mathbb{C}$, et on verra d'autres exemples dans les sections 3.2 et 3.3.

Proposition 3.6. *Si $K(v)$ est transcendant sur K, alors la fonction $\varphi : K(X) \to K(v)$ définie par $\varphi(R) = R(v)$ est un isomorphisme de corps. Ainsi, on peut définir sur $K(X)$ une dérivation D telle que $\forall R \in K(X), D(\varphi(R)) = \varphi(D(R))$. On dit que φ est un isomorphisme de corps différentiel.*

Preuve. Soit v transcendant sur K, alors $\forall P \in K[X]\backslash\{0\}$, on a $P(v) \neq 0$, φ est donc bien définie. $\forall R_1, R_2 \in K(X)$, on a

$$\varphi(R_1 + R_2) = (R_1 + R_2)(v) = R_1(v) + R_2(v) = \varphi(R_1) + \varphi(R_2)$$

$$\varphi(R_1 R_2) = (R_1 R_2)(v) = R_1(v) R_2(v) = \varphi(R_1)\varphi(R_2)$$

d'où φ est un morphisme de corps. Si $R = P/Q \neq 0$, on a $P(v) \neq 0, Q(v) \neq 0$, alors $\varphi(R) = P(v)/Q(v) \neq 0$. φ est donc injective, $K(X)$ est isomorphe à $\varphi(K(X))$, qui est aussi un corps. Or $K(v)$ est le plus petit corps contenant K et v, donc $K(v) = \varphi(K(X))$.

On définit une application D sur $K(X)$ par $D(R) = \varphi^{-1}(D(R(v)))$, alors $\varphi(D(R)) = D(\varphi(R))$. De plus, D est une dérivation sur $K(X)$, en effet, pour $R_1, R_2 \in K(X)$, on a

$$\begin{aligned}
D(R_1 + R_2) &= \varphi^{-1}(D(R_1(v) + R_2(v))) \\
&= \varphi^{-1}(D(R_1(v)) + D(R_2(v))) \\
&= \varphi^{-1}(D(R_1(v))) + \varphi^{-1}(D(R_2(v))) \\
&= D(R_1) + D(R_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(R_1 R_2) &= \varphi^{-1}(D(R_1(v) R_2(v))) \\
&= \varphi^{-1}(D(R_1(v)) R_2(v) + R_1(v) D(R_2(v))) \\
&= \varphi^{-1}(D(R_1(v)))\varphi^{-1}(R_2(v)) + \varphi^{-1}(R_1(v))\varphi^{-1}(D(R_2(v))) \\
&= D(R_1) R_2 + R_1 D(R_2)
\end{aligned}$$

Si $R \in K(X)$ tel que $D(R) = 0$, alors $D(R(v)) = \varphi(D(R)) = 0$, $R(v) \in K_{cst}$. Comme $(R - R(v))(v) = R(v) - R(v) = 0$, par la transcendance de v, on a $R - R(v) = 0$ donc $R = R(v) \in K_{cst}$, ce qui montre que $K(X)_{cst} = K_{cst}$. En conclusion, $K(X)$ est un sur-corps différentiel de K et isomorphe à $K(v)$. □

Grâce à cet isomorphisme φ, une fois qu'on vérifie que $K(v)$ est transcendant sur K, on peut se renvoyer dans le sur-corps différentiel $(K(X), D)$ isomorphe à $(K(v), D)$, toute propriété de la dérivation sur $K(X)$ est aussi vraie pour la dérivation sur $K(v)$. Donc désormais on ne distingue pas $K(v)$ avec $K(X)$ si v est transcendant sur K.

3.2 Extension de type logarithmique

Dans cette section on travaille sur les extensions de type $K(\log u)$ avec $u \in K^*$.

Definition 3.7. *Dans un corps différentiel E, on dit que $v \in E$ est un **logarithme** de $u \in E^*$ si $D(v) = D(u)/u$ et on note $v = \log u$.*

*Un sur-corps différentiel E de K est dit **logarithmique**, s'il est de la forme $E = K(v)$ où $v \in E$ est un logarithme d'un élément $u \in K^*$.*

Dans cette partie, on pourrait développer des propositions sur une extension logarithmique, mais pour les applications dans la section 5, on suppose plus généralement que $K(v)$ est un sur-corps de K tel que $D(v) \in K$, et rappelons que l'on a la convention que $K(v)$ est différent de K, donc $v \notin K$. On définit une application $\mathscr{D} : K[X] \to K[X]$ par $\mathscr{D}(P) = D(v)P' + P^D \in K[X]$, alors par la proposition 2.1, on a $\mathscr{D}(P)(v) = D(P(v))$, et si en plus v est transcendant sur K, alors $\mathscr{D}$ coïncide avec la dérivation D définie sur $K(X)$ dans la proposition 3.6, car dans ce cas-là on a $\varphi(\mathscr{D}(P)) = D(P(v))$.

Proposition 3.8. *Si $P \in K[X]$ est un polynôme tel que $\mathscr{D}(P) \in K$, alors P est de la forme $P = aX + b$ avec $a \in K_{cst}, b \in K$.*

Preuve. Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geq 1$, alors on a

$$\mathscr{D}(P) = D(v)P' + P^D = D(a_n)X^n + \sum_{i=0}^{n-1}(D(a_i) + (i+1)a_{i+1}D(v))X^i$$

$\mathscr{D}(P) \in K$ si et seulement si

$$\begin{cases} D(a_n) = 0 & (1) \\ D(a_i) + (i+1)a_{i+1}D(v) = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n-1 & (2) \end{cases}$$

Supposons maintenant que $\deg P = n \geq 2$, alors $a_n \neq 0$. Par (1), on a $a_n \in K_{cst}$, et par (2) en prenant $i = n - 1 \geq 1$, on a $0 = D(a_{n-1}) + na_nD(v) = D(a_{n-1} + na_nv)$, donc $a_{n-1} + na_nv \in K_{cst}$, d'où $v \in K$, ce qui entraîne que $K(v) = K$, contredit notre convention que $K(v) \neq K$.

Donc P est de la forme $P = aX + b$ avec $a, b \in K$, et par (1), on a $a \in K_{cst}$. □

Proposition 3.9. *Si $Q \in K[X]$ est un polynôme unitaire tel que $Q \mid \mathscr{D}(Q)$, alors $Q = 1$.*

Preuve. Soit $Q \in K[X]$ un polynôme unitaire. Si $\mathscr{D}(Q) \neq 0$, alors $\deg \mathscr{D}(Q) < \deg Q$, ce qui rend $Q \mid \mathscr{D}(Q)$ impossible.

On a donc $\mathscr{D}(Q) = 0$. Par Proposition 3.8, on n'a que deux possibilité : soit $Q = 1$, soit $Q = X + b$ avec $b \in K$. Si $Q = X + b$, on a $0 = \mathscr{D}(Q)(v) = D(Q(v)) = D(v + b)$, alors $v + b \in K_{cst}$ contredit le fait que $v \notin K$. □

La proposition suivante indique qu'une extension logarithmique $K(v)$ est toujours transcendante sous notre convention que $K(v) \neq K$.

Proposition 3.10. *Une extension $K(v)$ vérifiant $D(v) \in K$ est transcendante.*

Preuve. On montre que v est transcendant sur K. Par absurde, supposons que $\exists M_v \in K[X]\backslash\{0\}$ le polynôme minimal de v, alors $\mathscr{D}(M_v)(v) = D(M_v(v)) = D(0) = 0$. Par la définition de polynôme minimal, M_v est unitaire et $M_v \mid \mathscr{D}(M_v)$. Par la Proposition 3.9, on aurait $M_v = 1$ donc $M_v(v) = 1 \neq 0$, contradiction. □

3.3 Extension de type exponentiel

Au contraire de la section précédente, on traite ici les extensions de type $K(e^u)$ avec $u \in K$.

Definition 3.11. *Dans un corps différentiel* K*, on dit que* $v \in K^*$ *est une* ***exponentielle*** *de* $u \in K$ *si* $D(v)/v = D(u)$ *et on note* $v = e^u$*.*

Un sur-corps différentiel E *de* K *est dit* ***exponentiel****, s'il est de la forme* $E = K(v)$ *où* $v \in E$ *est une exponentielle d'un élément* $u \in K$*.*

Soit $K(v)$ une extension exponentielle de K avec $D(v)/v = D(u), v \notin K$, pour le polynôme $P \in K[X]$, on note $\mathscr{D}(P) = D(u)XP' + P^D \in K[X]$, alors $D(P)(v) = D(P(v))$. De façon analogue à la section précédente, on a les propositions suivantes :

Proposition 3.12. *Soit* $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ *avec* $a_n \in K$ *tel que* $a_n v^n \notin K_{cst}$*, alors on a* $\mathscr{D}(P) \neq 0$ *et* $\deg \mathscr{D}(P) = \deg P$*.*

Preuve. $a_n v^n \notin K_{cst}$ implique que $a_n \neq 0$ et $\deg P = n$. On a la formule de $\mathscr{D}(P)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{D}(P) = D(u)XP' + P^D = \sum_{i=0}^{n} (ia_i D(u) + D(a_i))X^i$$

Alors $\deg \mathscr{D}(P) \leq \deg P$. Pour que $\deg \mathscr{D}(P) < \deg P$, il faut que $na_n D(u) + D(a_n) = 0$, donc $nD(v)/v + D(a_n)/a_n = 0$, ce qui équivaut à $D(a_n v^n)/(a_n v^n) = 0$, il faut donc $a_n v^n \in K_{cst}$, ce qui contredit notre hypothèse. □

Proposition 3.13. *On suppose que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, v^n \notin K$*. Soit* $P \in K[X]$ *tel que* $P \mid \mathscr{D}(P)$*, alors* P *est de la forme* aX^n *avec* $a \in K$

Preuve. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ avec $a_n \neq 0$, supposons que P possède au moins deux termes, alors $n \geq 1$ et $\exists j < n$ tel que $a_j \neq 0$. Par l'hypothèse que $v^n \notin K$ donc $a_n v^n \notin K_{cst}$ et la proposition 3.12, on a $\deg \mathscr{D}(P) = \deg P$. Pour que $P \mid \mathscr{D}(P)$, il faut que $\exists q \in K^*$ tel que $\mathscr{D}(P) = qP$, i.e.

$$\sum_{i=0}^{n} (ia_i D(u) + D(a_i))X^i = q \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

En comparant les coefficients de X^n et X^j, on obtient

$$na_n D(v)/v + D(a_n) = qa_n, \ \ ja_j D(v)/v + D(a_j) = qa_j$$

On a donc $D(a_n v^n)/(a_n v^n) = q = D(a_j v^j)/(a_j v^j)$, ce qui nous donne $v^{n-j} \in K$ avec $n - j > 0$, contredit notre hypothèse. □

Corollaire 3.14. *Une extension exponentielle* $K(v)$ *est transcendante sauf si* $\exists n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $v^n \in K$*. Ce qui équivaut à dire que,* $K(e^u)$ *est transcendante sauf si* $\exists n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* nu *soit un logarithme d'un élément de* K*.*

Preuve. Supposons que v est algébrique sur K et M_v est le polynôme minimal de v, on a $M_v \mid \mathscr{D}(M_v)$. Si $\forall n \in \mathbb{N}^*, v^n \notin K$, par la proposition 3.13 et la propriété de M_v, on aurait $M_v = X$, donc $v = M_v(v) = 0$, ce qui contredit la définition d'exponentielle. □

À partir d'ici on suppose que v est transcendant sur K. Grâce à l'isomorphisme φ défini dans la proposition 3.6, on se renvoie dans le sur-corps différentiel $K(X)$, qui est de type exponentiel, et la fonction $\mathscr{D}$ dans les propositions précédentes coïncide avec la dérivation D définie sur $K(X)$.

Proposition 3.15. *Soit $R \in K(X)$ tel que $D(R) \in K[X]$, alors soit $R \in K_{cst}$ soit R est un polynôme de même degré que $D(R)$.*

Preuve. Posons $R = N + P/Q$ avec $P, Q, N \in K[X]$, Q unitaire non-nul et P soit nul soit vérifiant $\deg P < \deg Q, \operatorname{pgcd}(P, Q) = 1$.

Si $P = 0$, alors R est un polynôme. Si $R \notin K_{cst}$, d'après la proposition 3.12, on a $\deg D(R) = \deg R$.

Si $P \neq 0$, l'hypothèse $D(R) \in K[X]$ équivaut à $D(P/Q) = (D(P)Q - PD(Q))/Q^2 \in K[X]$, alors $QD(P/Q) = D(P) - PD(Q)/Q \in K[X]$, on a donc $Q \mid PD(Q)$. Comme $\operatorname{pgcd}(P, Q) = 1$, on a $Q \mid D(Q)$. Par la proposition 3.13, Q est de la forme $Q = X^n$, $D(Q)/Q = nD(u) \in K$, alors $\deg QD(P/Q) = \deg(D(P) - PD(Q)/Q) \leq \deg P < \deg Q$, pour que cela soit vrai il faut que $D(P/Q) = 0$, donc $P/Q \in K_{cst}$, $\deg P = \deg Q$, ce qui contredit notre hypothèse. □

3.4 Extension algébrique

Pour faciliter la démonstration du théorème de Liouville, nous allons développer une théorie plus détaillée sur les extensions algébriques.

Soit $E = K(v)$ une extension algébrique sur K, soit $M_v \in K[X]$ le polynôme minimal de v de degré n, alors par la proposition 3.5, $K(v)$ est un espace vectoriel de dimension n sur K, avec la base $1, v, \ldots, v^{n-1}$. Si $u \in K(v)$, l'application $x \mapsto ux$ est une application K-linéaire sur $K(v)$, on note m_u à la fois l'application et sa matrice sur la base $1, v, \ldots, v^{n-1}$. Par les connaissances d'algèbre linéaire, la trace et le déterminant d'une application linéaire ne dépendent pas du choix de base, on note $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(m_u)$ et $N(u) = \det(m_u)$. Par la définition de trace et de déterminant, on a les faits suivants :

1) tr est $K-$linéaire.
2) Pour $\lambda \in K$, $\operatorname{tr}(\lambda) = n\lambda$.
3) Pour $x, y \in K(v)$, $N(xy) = N(x)N(y)$.
4) Pour $\lambda \in K$, $N(\lambda) = \lambda^n$.

Pour une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ On note A^D la matrice $(D(a_{i,j}))$. Pour $u \in K(v)$, il existe un unique $P \in K[X]$ avec $\deg P < n$ tel que $u = P(v)$, les coefficients de P étant les coordonnées de u sous la base $1, v, \ldots, v^{n-1}$, on appelle P le polynôme coordonné de u. On définit une application linéaire $\Delta : K(v) \to K(v)$ par $\Delta(P(v)) = P'(v)D(v)$.

Lemme 3.16. *Pour tout $x \in K(v)$, on a*

$$m_x \circ \Delta + m_{D(x)} = \Delta \circ m_x + m_x^D \tag{$*$}$$

Preuve. On note $Q_m \in K[X]$ le polynôme coordonné de xv^m, et q_m le vecteur colonne correspondant. Alors

$$m_x = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & \ldots & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

et

$$m_x^D = \begin{pmatrix} q_0^D & q_1^D & \ldots & q_{n-1}^D \end{pmatrix}$$

Pour $y = v^i$ où $i < n$, on calcule l'image de y par l'application à gauche

$$m_x \circ \Delta v^i + m_{D(x)} v^i = xiv^{i-1} D(v) + D(x)v^i = xD(v^i) + D(x)v^i = D(xv^i)$$

et par l'application à droite

$$\Delta \circ m_x v^i + m_x^D v^i = \Delta(xv^i) + m_x^D v^i = Q_i'(v)D(v) + Q_i^D(v) = D(xv^i)$$

Deux applications linéaires envoyant la base vers les mêmes images sont identiques, on a donc démontré l'égalité $(*)$. $\square$

Proposition 3.17. *Pour tout $x \in K(v)$, on a $\mathrm{tr}(D(x)) = D(\mathrm{tr}(x))$.*

Preuve. D'après la propriété de trace, on a $\mathrm{tr}(m_x \circ \Delta) = \mathrm{tr}(\Delta \circ m_x)$, donc par $(*)$, on a $\mathrm{tr}(D(x)) = \mathrm{tr}(m_{D(x)}) = \mathrm{tr}(m_x^D) = D(\mathrm{tr}(x))$. $\square$

Pour $A \in M_n(K)$, on note $A^\#$ la transposée de la matrice des cofacteurs de A. Pour $x \in K(v)$, on note $x^\# = \begin{cases} N(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors on a $m_{x^\#} = m_x^\#$, car si $x = 0$, on a $m_{x^\#} = m_x^\# = 0$, sinon, par l'égalité $m_{x^\#} m_x = N(x)I = m_x^\# m_x$, avec m_x inversible, on a l'égalité voulue.

Lemme 3.18. *Pour une matrice A, on a $D(\det A) = \mathrm{tr}(A^\# A^D)$, et pour tout $x \in K(v)$, on a $\mathrm{tr}(x^\# D(x)) = D(N(x))$.*

Preuve. Pour $A = (a_{i,j})$, d'après la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned}
D(\det(A)) = D\Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\Big) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) D\Big(\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}\Big) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=1}^{n} D(a_{\sigma(i),i}) \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{\sigma(j),j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) D(a_{\sigma(i),i}) \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{\sigma(j),j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i)=k}} \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{\sigma(j),j} \right) D(a_{k,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A^\#_{i,k} D(a_{k,i}) = \sum_{i=1}^{n} (A^\# A^D)_{i,i} \\
&= \mathrm{tr}(A^\# A^D)
\end{aligned}$$

Pour $x \in K(v)$, par l'égalité $(*)$, on a

$$\mathrm{tr}(x^\# D(x)) = \mathrm{tr}(m_x^\# m_{D(x)}) = \mathrm{tr}(m_x^\# m_x^D) + \mathrm{tr}(m_x^\# \Delta m_x) - \mathrm{tr}(m_x^\# m_x \Delta)$$

Or $m_x^\# m_x = m_x m_x^\# = N(x)I$, donc $\mathrm{tr}(m_x^\# \Delta m_x) = \mathrm{tr}(m_x m_x^\# \Delta) = \mathrm{tr}(m_x^\# m_x \Delta)$, d'où

$$\mathrm{tr}(x^\# D(x)) = \mathrm{tr}(m_x^\# m_x^D) = D(\det(m_x)) = D(N(x))$$

$\square$

Proposition 3.19. *Pour tout $x \in K(v)^*$, on a*

$$\frac{D(N(x))}{N(x)} = \operatorname{tr}\left(\frac{D(x)}{x}\right)$$

Preuve. D'après ce qu'on a fait,

$$\frac{D(N(x))}{N(x)} = \frac{\operatorname{tr}(x^{\#}D(x))}{N(x)} = \operatorname{tr}\left(\frac{x^{\#}D(x)}{N(x)}\right) = \operatorname{tr}\left(\frac{D(x)}{x}\right)$$

□

3.5 Définition des fonctions élémentaires

Jusqu'ici on peut caractériser les fonctions dans $\mathcal{E}(\Omega)$ à l'aide des extensions de $\mathbb{C}(z)$. Par la définition 1.1, $\forall f \in \mathcal{E}(\Omega)$, il existe des sur-corps $(K_i)_{0\leq i\leq m}$ de $\mathbb{C}(z)$ tels que $f \in K_m$, et

$$\mathbb{C}(z) = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{m-1} \subset K_m$$

où K_{i+1} est de la forme $K_i(v_{i+1})$, avec $v_{i+1} \in K_{i+1}$ étant soit algébrique sur K_i, soit un logarithme ou une exponentielle d'un élément de K_i.

Dans le cas général, pour un corps différentiel K, on peut définir les sur-corps différentiels élémentaires de K ainsi :

Definition 3.20. *Un sur-corps différentiel E de K est dit* ***élémentaire*** *sur K s'il existe une suite $(K_i)_{0\leq i\leq m}$ de sous-corps de E telle que :*

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{m-1} \subset K_m = E$$

où K_{i+1} est de la forme $K_i(v_{i+1})$, avec $v_{i+1} \in K_{i+1}$ étant soit algébrique sur K_i, soit un logarithme ou une exponentielle d'un élément de K_i.

Soit $f \in K$, une ***primitive élémentaire*** *de f est un élément g appartenant à certain sur-corps différentiel élémentaire de K, tel que $D(g) = f$.*

4 Théorème de Liouville

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème dû à Liouville, relatif aux fonctions élémentaires dont les primitives sont élémentaires[3].

Definition 4.1. *Dans un corps différentiel K, on appelle* ***somme de Liouville*** *dans K tout élément de K de la forme*

$$D(g) + \sum_{j\in J} c_j \frac{D(f_j)}{f_j}, \text{ avec } g \in K, c_j \in K_{cst}, f_j \in K\backslash\{0\}.$$

Théorème 4.2 (Liouville-Ostrowski)**.** *Soit E un sur-corps élémentaires de K, soit $f \in K$. Si f admet une primitive dans E i.e. $\exists g \in E$ tel que $D(g) = f$, alors f est une somme de Liouville dans K.*

Avant de démontrer ce théorème, il est utile d'énoncer le lemme suivant :

Lemme 4.3. *Soit D une dérivation sur le corps des fractions rationnelles $K(X)$ vérifiant $D(X) \in K[X]$; Soient $P \in K[X], Q \in K[X]\backslash\{0\}$ tels que* $\operatorname{pgcd}(P,Q) = 1$, *et $(Q_j)_{j\in J}$ une famille finie de polynômes non nuls de $K[X]$ sans facteur carré et premiers entre eux deux à deux. S'ils vérifient l'égalité suivante :*

$$\sum_{j\in J} \frac{P_j}{Q_j} = D(\frac{P}{Q})$$

alors $Q \mid D(Q)$. Si de plus $i \in J$ est tel que $\operatorname{pgcd}(Q_i, Q) = 1$, *alors $Q_i \mid P_i$.*

Preuve. D'après la formule de $D(P/Q)$, on a

$$\frac{PD(Q) - QD(P)}{Q^2} = D(\frac{P}{Q}) = \sum_{j\in J} \frac{P_j}{Q_j} = \frac{\sum_{j\in J} \left(P_j \prod_{k\in J, k\neq j} Q_l\right)}{\prod_{j\in J} Q_j} \qquad (**)$$

D'où on a

$$Q^2 \sum_{j\in J} \left(P_j \prod_{k\in J, k\neq j} Q_l\right) = (PD(Q) - QD(P)) \prod_{j\in J} Q_j$$

Donc

$$Q^2 \mid (PD(Q) - QD(P)) \prod_{j\in J} Q_j$$

Posons $R = \operatorname{pgcd}(Q^2, \prod_{j\in J} Q_j)$, en divisant par R, on en déduit que $\frac{Q^2}{R}$ et $\frac{\prod_{j\in J}(Q_j)}{R}$ sont premiers entre eux. D'où d'après le lemme de Gauss il vient que $\frac{Q^2}{R} \mid (PD(Q) - QD(P))$. Comme les $(Q_j)_{j\in J}$ sont sans facteurs carrés et premiers entre eux deux à deux, le produit de Q_j est encore sans facteurs carrés. R étant un diviseur de $\prod_{j\in J} Q_j$ est alors aussi sans facteurs carrés, on a donc $R \mid Q^2 \Rightarrow R \mid Q$. Donc $Q \mid PD(Q) - QD(P)$.Par conséquent, $Q \mid PD(Q)$. On en déduit que $Q \mid D(Q)$ car $\operatorname{pgcd}(P,Q) = 1$ par hypothèse.

Soit $i \in J$ est tel que $\operatorname{pgcd}(Q_i, Q) = 1$, On a vu précédemment que $Q \mid D(Q)$, i.e $\exists M \in K[X]$ tel que $D(Q) = MQ$, donc par $(**)$, on a

$$PM - D(P) = Q \times \frac{\sum_{j\in J} P_j \prod_{k\in J, k\neq j} Q_k}{\prod_{j\in J} Q_j} = \frac{Q\left(P_i \prod_{k\neq i} Q_k + \sum_{j\neq i} P_j \prod_{k\neq j} Q_k\right)}{Q_i \prod_{j\neq i} Q_j}$$

Donc Q_i divise le numérateur, et comme $\operatorname{pgcd}(Q_i, Q) = 1$, et dans chaque terme de la somme $\sum_{j\neq i} P_j \prod_{k\neq j} Q_k$ il y a un facteur Q_i, on a donc $Q_i \mid P_i \prod_{k\neq i} Q_k$. Or pour tout $k \neq i, \operatorname{pgcd}(Q_i, Q_k) = 1$, donc $Q_i \mid P_i$. □

Ce qui suit est la démonstration du théorème principal.

Preuve du Théorème de Liouville-Ostrowski. Soit E un sur-corps élémentaire de K, par la définition, il existe une suite $(K_i)_{0\leq i\leq m}$ de sous-corps de E telle que :

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{m-1} \subset K_m = E$$

où K_{i+1} est de la forme $K_i(v_{i+1})$, avec $v_{i+1} \in K_{i+1}$ étant soit algébrique sur K_i, soit un logarithme ou une exponentielle d'un élément de K_i. Supposons que $f \in K$ et $\exists g \in E$ tel que $f = D(g)$, alors f est une somme de Liouville dans E, on va donc démontrer qu'elle l'est aussi dans K par récurrence sur m. Si $m = 0$, le résultat est immédiat. Supposons qu'on a démontrer le résultat pour $m = n \in \mathbb{N}$, i.e. f est une somme de Liouville dans $E = K_n$ implique qu'elle l'est aussi dans K, alors pour $m = n+1$, si f est une somme de Liouville dans $E = K_{n+1}$, par l'hypothèse de la récurrence, elle est une somme de Liouville dans $K_1 = K(v_1)$. Il suffit de démontrer qu'elle l'est aussi dans K.

1) Si v_1 est algébrique sur K, soit d la dimension de K_1 sur K. Par la formule de somme de Liouville,
$$f = D(g) + \sum_{j\in J} c_j \frac{D(f_j)}{f_j}, g \in K_1, c_j \in K_{cst}, f_j \in K_1^*$$
En appliquant les opérateurs tr et N définis dans la section 3.4, alors
$$df = \text{tr}(f) = \text{tr}(D(g)) + \sum_{j\in J} c_j \text{tr}\left(\frac{D(f_j)}{f_j}\right) = D(\text{tr}(g)) + \sum_{j\in J} c_j \frac{D(N(f_j))}{N(f_j)}$$
Or, $\text{tr}(g), N(f_j) \in K$, f est donc une somme de Liouville dans K.

2) Si $K_1 = K(v_1)$ est transcendant, logarithmique ou exponentiel sur K, alors on peut se placer dans le corps différentiel $K(X)$ isomorphe à $K(v_1)$, donc $f \in K$ est aussi une somme de Liouville dans $K(X)$:
$$f = D(R) + \sum_{j\in J} c_j \frac{D(R_j)}{R_j}$$
Posons $R_j = a_j \frac{\prod_{i\in I} P_{ji}^{m_{ji}}}{\prod_{k\in K} Q_{jk}^{n_{jk}}}$ avec $a_j \in K^*$ et P_{ji}, Q_{jk} des polynômes unitaires irréductibles, alors
$$\frac{D(R_j)}{R_j} = \frac{D(a_j)}{a_j} + \sum_{i\in I} m_{ji} \frac{D(P_{ji})}{P_{ji}} - \sum_{k\in K} n_{jk} \frac{D(Q_{jk})}{Q_{jk}}$$
En appliquant cette formule dans l'expression de f, et en regroupant tous les termes, on en déduit que f peut s'écrire sous la forme
$$f = D(R) + \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} + \sum_{j\in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$$
avec $R \in K(X)$, $f_i \in K^*$, et $Q_j \in K[X]\backslash\{0\}$. Posons $R = P/Q$ avec Q unitaire et $\text{pgcd}(P, Q) = 1$, alors
$$D(\frac{P}{Q}) = f - \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} - \sum_{j\in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$$
et le lemme 4.3 s'applique, on en déduit que $Q \mid D(Q)$, et si $j \in J$ est tel que $\text{pgcd}(Q_j, Q) = 1$, alors $Q_j \mid D(Q_j)$.

   a) Si $K(X)$ est logarithmique, alors $\exists u \in K$ tel que $D(X) = \frac{D(u)}{u}$. On a $Q \mid D(Q)$, alors par la proposition 3.9, $Q = 1$, ce qui entraîne que $\forall j \in J, \text{pgcd}(Q_j, Q) = 1$, donc $Q_j \mid D(Q_j)$, donc $Q_j = 1$. Alors on a
$$D(P) = f - \sum_{i\in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} \in K$$

Par la proposition 3.8, $P = aX + b$ avec $a \in K_{cst}$ et $b \in K$. On a finalement que

$$f = aD(X) + D(b) + \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} = D(b) + a\frac{D(u)}{u} + \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}$$

qui est une somme de Liouville dans K.

b) Si $K(X)$ est une extension exponentielle, alors $\exists u \in K$ tel que $\frac{D(X)}{X} = D(u)$. Puisque $Q \mid D(Q)$, par la proposition 3.13 et le fait que Q est unitaire, Q est de la forme X^n. Alors pour tout $j \in J$ tel que $Q_j \neq X$, on a $\text{pgcd}(Q_j, Q) = 1$ et donc $Q_j \mid D(Q_j)$, $Q_j = 1$. Ce qui implique que

$$D(R) = f - \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} - d_1 \frac{D(X)}{X} = f - \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} - d_1 D(u) \in K$$

Donc, d'après 3.15 on aura soit $R \in K_{cst}$, soit R est un polynôme de même degré que $D(R)$ càd $\deg R = 0$. Dans les deux cas, on a $R \in K$. Ce qui prouve que

$$f = D(R + d_1 u) + \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}$$

est une somme de Liouville dans K.

□

5 Exemples des primitives non-élémentaires

Nous terminons notre mémoire par des applications du Théorème de Liouville. On démontrera que les fonctions suivantes n'admettent pas de primitives élémentaires[2], ce qui répond aussi à la question initialement posée :

$$f_1(z) = e^{z^2},\ f_2(z) = \frac{e^z}{z^n},\ f_3(z) = \frac{\sin z}{z},\ f_4(z) = z \tan z,\ f_5(z) = z^z$$

Il faut d'abord déterminer à quel corps différentiel appartiennent respectivement ces fonctions, et connaître les types d'extensions par rapport à $\mathbb{C}(z)$. On voit facilement que $f_1 \in \mathbb{C}(z)(e^{z^2})$, $f_2 \in \mathbb{C}(z)(e^z)$, $f_3 = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz} \in \mathbb{C}(z)(e^{iz})$, $f_4 = \frac{2iz}{e^{2iz}+1} - iz \in \mathbb{C}(z)(e^{2iz})$, $f_5 = e^{z \log z} \in \mathbb{C}(z)(\log z)(e^{z \log z})$, les propositions suivantes permettent de déterminer la transcendance de chaque extension.

Proposition 5.1. *Soient $K(T)$ est un sur-corps différentiel transcendant de K tel que $D(T) \in K$, soit $U \in K(T)$ tel que $U \notin K$, alors U n'admet pas de logarithme dans $K(T)$.*

Preuve. Posons $U = a\frac{\prod_{i \in I} P_i^{c_i}}{\prod_{j \in J} Q_j^{d_j}}$ où $a \in K$ et $P_i, Q_j \in K[T]$ unitaires irréductibles, $c_j, d_j \in \mathbb{N}$. Supposons que $U \in K(T)$ admet un logarithme $P/Q \in K(T)$, où $P, Q \in K[T]$ avec Q unitaire, et $\text{pgcd}(P, Q) = 1$, alors par la définition, on a

$$D(\frac{P}{Q}) = \frac{D(U)}{U} = \frac{D(a)}{a} + \sum_{i \in I} c_i \frac{D(P_i)}{P_i} - \sum_{j \in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$$

Le lemme 4.3 s'applique, on a donc $Q \mid D(Q)$. Par la proposition 3.9, on a $Q = 1$. Cela entraîne que $P_i \mid D(P_i), Q_j \mid D(Q_j)$ pour tout $i \in I, j \in J$, donc $P_i = 1, Q_j = 1$. Alors $U = a \in K$, contradiction. □

Proposition 5.2. *Sous les mêmes hypothèses sur $K(T)$ de la proposition précédente, soit $K(T)(e^U)$ une extension exponentielle avec $U \in K(T)$ tel que $D(U) \notin K$, alors e^U est transcendante sur $K(T)$. Dans un cas particulier, si $u \in \mathbb{C}(z) \setminus \mathbb{C}$, alors e^u est transcendant sur $\mathbb{C}(z)$.*

Preuve. Supposons que e^U est algébrique sur $K(T)$, alors par la proposition 3.14, il y aurait $n \in \mathbb{N}^*$ tel que nU soit un logarithme d'un élément $R \in K(T)$, c-à-d $nD(U) = D(R)/R \in K(T)$. On a $R \notin K$ car sinon $D(U) \in K$. Mais par la proposition précédente, cela implique que R n'admet pas de logarithme dans $K(T)$, contradiction.

Dans le cas particulier, si $u \in \mathbb{C}(z) \setminus \mathbb{C}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nu n'est pas un logarithme d'une constante. Comme z est transcendant sur $\mathbb{C}$, par la proposition précédente, nu n'est pas un logarithme d'une fraction rationnelle non-constante de z, ce qui implique la transcendence de e^u. $\square$

La proposition 5.2 nous répond déjà que e^u est transcendant sur $\mathbb{C}(z)$ si $u \in \mathbb{C}(z)$ et si u n'est pas constant. Pour $\mathbb{C}(z)(\log z)(e^{z \log z})$, par la proposition 5.1, z n'a pas de logarithme dans $\mathbb{C}(z)$, donc $\log z \notin \mathbb{C}(z)$, $\log z$ est donc transcendant sur $\mathbb{C}(z)$, et le fait que $D(z \log z) = \log z + 1 \notin \mathbb{C}(z)$ entraîne aussi la transcendance de $e^{z \log z}$ sur $\mathbb{C}(z)(\log z)$.

Ensuite, il faut démontrer qu'elles n'admettent pas de primitives élémentaires. Par le théorème de Liouville, il reste à démontrer qu'elles ne sont pas des sommes de Liouville respectivement dans les corps auxquels elles appartiennent.

Vu les différentes expressions de $f_1, \ldots, f_5$, on établit une proposition permettant de démontrer tous les résultats voulus.

Proposition 5.3. *Soit $K(X)$ une extension exponentielle transcendante de K et a_{-1}, $a_1, \ldots, a_N \in K$. Posons*

$$F = \frac{a_{-1}}{X} + \sum_{m=1}^{N} a_m X^m + \sum_{i \in I} \frac{P_i}{Q_i}$$

avec $P_i, Q_i \in K[X]$, $Q_i \neq X$ des polynômes unitaires irréductibles différents vérifiant $\deg P_i < \deg Q_i$. *Si f admet une primitive élémentaire, alors pour tout $m = -1, 1, \ldots, N$, il existe $b_m \in K$ tel que $D(b_m X^m) = a_m X^m$; pour tout $i \in I$, il existe $c_i \in K_{cst}$ tel que $Q_i \mid (c_i D(Q_i) - P_i)$.*

Preuve. Soit $u \in K$ tel que $D(u) = D(X)/X$. Par le théorème de Liouville, si F admet une primitive élémentaire, alors F est une somme de Liouville dans $K(X)$. D'après ce qu'on a fait, on peut exprimer F dans la forme suivante :

$$F = \frac{a_{-1}}{X} + \sum_{m=1}^{N} a_m X^m + \sum_{i \in I} \frac{P_i}{Q_i} = D(\frac{P}{Q}) + \sum_{l \in L} e_l \frac{D(g_l)}{g_l} + \sum_{j \in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j}$$

Pour chaque Q_i, on peut supposer qu'il y a un certain $j \in J$ tel que $Q_i = Q_j$, sinon on ajoute $d_i D(Q_i)/Q_i$ au membre de droite avec $d_i = 0$. On peut aussi supposer que $Q_j = X$ pour un certain j, pour la même raison. En regroupant les termes et quitte à changer de notations et d'indices, on peut écrire

$$\frac{a_{-1}}{X} + \sum_{m=1}^{N} a_m X^m = \lambda + D(\frac{P}{Q}) + \sum_{j \in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j} + \sum_{i \in I} \frac{c_i D(Q_i) - P_i}{Q_i}$$

où $\lambda = e_1\frac{D(X)}{X} + \sum_{l\in L} e_l\frac{D(g_l)}{g_l} \in K$, et Q_j, Q_i sont des polynômes unitaires irréductibles, différents l'un de l'autre, aussi différents de X. Alors par le lemme 4.3, on a $Q \mid D(Q)$, Par la proposition 3.13, on a $Q = X^n$, ce qui entraîne que $Q_j \mid D(Q_j)$, $Q_i \mid (c_iD(Q_i)-P_i)$, car Q_i, Q_j sont irréductible, differents de X. À partir du fait que $Q_j \mid D(Q_j)$, on aurait $Q_j = X^m$, mais cela contredit l'hypothèse sur Q_j, d'où $\sum_{j\in J} d_j\frac{D(Q_j)}{Q_j} = 0$. Pour chaque $i \in I$, puisque $\deg P_i < \deg Q_i$, $\deg D(Q_i) = \deg Q_i$, alors $\deg(c_iD(Q_i) - P_i) = \deg Q_i$, donc $\sum_{i\in I}\frac{c_iD(Q_i)-P_i}{Q_i} \in K$.

On a donc

$$\frac{a_{-1}}{X} + \sum_{m=1}^{N} a_mX^m = \mu + D(\frac{P}{X^n})$$

avec $\mu = \lambda + \sum_{i\in I}\frac{c_iD(Q_i)-P_i}{Q_i} \in K$, d'où

$$a_{-1}X^{n-1} + \sum_{m=1}^{N} a_mX^{n+m} = D(P) - nPD(u) + \mu X^n$$

Posons $P = \sum\limits_p b_pX^p$, alors $D(P) - nPD(u) = \sum\limits_p(D(b_p) + (p-n)b_pD(u))X^p$, donc

$$a_{-1}X^{n-1} + \sum_{m=1}^{N} a_mX^{n+m} = \sum_p(D(b_p) + (p-n)b_pD(u))X^p + \mu X^n$$

En comparant les coefficients de chaque côté, on a $a_m = D(b_{n+m}) + mb_{n+m}D(u)$. Quitte à changer d'indices, on a $a_m = D(b_m) + mb_mD(u) = D(b_m) + b_mD(X^m)/X^m$, d'où $a_mX^m = D(b_mX^m)$, pour $m = -1, 1, \ldots, N$. □

Proposition 5.4. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, si de plus $K = k(T)$ est une extension transcendante de k tel que $D(T) \in k$, et si $a_m, D(X)/X \in k[T]$, alors $b_m \in k[T]$.*

Preuve. On a déjà que $a_m = D(b_m) + mb_mD(X)/X$. Si $K = k(T)$, et que $a_m, D(X)/X \in k[T]$, posons $b_m = A/B$ avec B unitaire et $\mathrm{pgcd}(A, B) = 1$, alors $a_m = D(A/B) + mAD(X)/(BX)$, d'où $a_mB = D(A) - AD(B)/B + mAD(X)/X$, on a donc $B \mid D(B)$. Par la proposition 3.9, on a $B = 1$. □

On revient aux cinq fonctions $f_1, \ldots, f_5$.

Pour $f_1 = e^{z^2}$, on applique la proposition 5.3 avec $k = \mathbb{C}, T = z, K = \mathbb{C}(z), X = e^{z^2}, a_1 = 1$ et la proposition 5.4. Si f_1 admet une primitive élémentaire, alors $\exists g \in \mathbb{C}[z]$ tel que $e^{z^2} = D(ge^{z^2})$, donc $e^{z^2} = g'e^{z^2} + 2zge^{z^2}$, d'où $g' + 2zg = 1$. Or $\deg(g' + 2zg) > 0$ si $g \neq 0$, l'égalité n'est donc possible pour aucun polynôme g.

Pour $f_2 = e^z/z^n$, on applique la proposition 5.3 avec $K = \mathbb{C}(z), X = e^z$. Si f_2 admet des primitives élémentaire, alors $\exists g \in \mathbb{C}(z)$ tel que $e^z/z^n = D(ge^z)$. Remarquons que cette égalité doit être valable sur tout $\mathbb{C}^*$, par la relation entre l'intégrale et la primitive, on aurait $\int_{C(0,1)} e^z/z^n\,\mathrm{d}z = 0$. Or par le théorème de résidus, cet intégrale est non-nulle pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc f_2 n'admet pas de primitive élémentaire.

Pour $f_3 = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2iz}$, on applique la proposition 5.3, si f_3 admet une primitive élémentaire, alors $\frac{e^{iz}}{2iz}$ et $\frac{e^{-iz}}{2iz}$ admettent aussi leur primitive élémentaire. Par le même raisonnement qu'on a fait pour f_2, ce n'est pas possible.

Pour $f_4 = \frac{2iz}{e^{2iz}+1} - iz$, on pose $g = \frac{2iz}{e^{2iz}+1}$, si f_4 a une primitive élémentaire, alors g aussi. On applique la proposition 5.3 avec $K = \mathbb{C}(z), X = e^{2iz}, P_1 = 2iz, Q_1 = X + 1$, alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $(X + 1) \mid (cD(X + 1) - 2iz)$, i.e. $(X + 1) \mid (cX - z)$ donc $(X + 1) \mid (z + c)$, ce qui n'est pas possible.

Pour $f_5 = e^{z \log z}$, on applique la proposition 5.4 avec $k = \mathbb{C}(z), T = \log z, K = \mathbb{C}(z, \log z), X = e^{z \log z}$. Si f_5 admet une primitive élémentaire, alors $\exists g \in \mathbb{C}(z, \log z)$ tel que $e^{z \log z} = D(ge^{z \log z})$, donc $D(g) + g(1 + \log z) = 1$. Comme $D(e^{z \log z})/(e^{z \log z}) = 1 + \log z \in \mathbb{C}(z)[\log z]$, par la proposition, on a $g \in \mathbb{C}(z)[\log z]$. Or le degré de $D(g) + g(1 + \log z)$ par rapport à $\log z$ ne peut pas être 0, d'où la contradiction.

Références

[1] Concours École Normale Supérieure, «Composition de mathématique», ENS 1995.

[2] Denis Feldmann, «Quelles sont les primitives de e^{-x^2} ? De $\frac{\sin x}{x}$? De x^x ?», http ://denisfeldmann.fr/PDF/liou.pdf

[3] Joseph Liouville, «Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes», J. reine angew. Math., vol. 13, 1835, p. 93-118.