巴黎高师1995年入学试题 数学部分

时间：4小时

翻译: TIAN Peng

简介

一个初等函数, 不严格地讲, 就是定义在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的某个开集上的函数, 并且其表达式是由指数函数 $(e^z=\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!})$ 、对数函数 $(\log(1+z)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n})$ 、有理运算(和、积、商)和代数运算(n次方根)复合而成. 例如, 如下的一些函数：

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

$$\frac{z^{1995}\sqrt[3]{\sin\frac{z^2}{1+z}}}{e^{\sqrt{\log z}}}, \arctan(z)=\frac{\log(1+iz)-\log(1-iz)}{2i}$$

都是初等函数. 根据这样一个模糊的定义, 就可以确信, 一个初等函数的导函数也是初等函数, 并且我们已经知道, 一个实系数或复系数的有理函数有初等原函数. 但是, 还有一些形式上非常简单的初等函数, 它们的原函数不是初等函数：比如函数 $z\mapsto e^{z^2}$ ；因此, 想用那些常规的求不定积分的方法求其原函数是不可能的.
这个练习的目的一方面是熟悉"初等函数"的概念, 另一方面是要证明一个由Liouville 得到, 并由Ostrowski 改进的判定定理, 应用该定理可以判断某些函数是否有初等的原函数. 我们这里所用的方法是纯代数的, 不定积分被看做是导数运算的逆运算：我们有一个域 K (设想由实系数或复系数的有理函数构成的域), 和 K 的一个扩充域 E (这里我们承认, 在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的一个连通开集上定义的所有解析函数构成一个整环, 因此我们可以考虑它的分式域), 连同 E 上的一个求导运算 $D:E\to E$ 满足求导的常规性质(见下文). 这样, 我们就可以严格地定义" $f\in E$ 是 K 上的初等函数"的具体含义, 并且针对某些情况给出判断准则, 用于判断是否 $f\in E$ 有原函数 $g\in E$ 满足 $D(g)=f$, 并且 g 是 K 上的初等函数.

第0部分: 预备

我们假定, 本文讨论的所有的域都包含有理数域 $\mathbb{Q}$, 因此, 如果 x 是域中的元素, $n\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, 那么 $nx=0$ 就意味着 $x=0$. 我们有如下事实：如果 K 是一个域, 那么 K 上的多项式环 $K[X]$ 是主理想环.

- 设 E 是 K 的一个扩域, 即一个包含 K 的域. 设 $x\in E$, 如果存在 K 上的非零多项式 $P\in K[X]\backslash\{0\}$ 使得 $P(x)=0$, 那么我们称 x 是 K 上的代数元, 否则称 x 为 K 上的超越元. 对于 $x\in E$, 我们用 $K(x)$ 表示 E 的含有 K 和 x 的最小子域.

  1. 如果 $x\in E$ 是 K 上的代数元, 证明存在唯一的首一多项式 $P_x\in K[X]$ 使得, 对任意 $Q\in K[X]$, 我们有 $Q(x)=0\Leftrightarrow P_x\,|\,Q$. 证明 $K(x)=\bigoplus_{i=0}^{n-1}Kx^i$, 其

中 $n=\deg P_x$, 特别地, 有 $\dim_K K(x)=n$.
反之, 如果 $K(x)$ 是 K 上的有限维向量空间, 证明 x 是 K 上的代数元(在 K 的向量空间 $K(x)$ 中考虑 x 的各个方幂).
多项式 P_x 被称为 x 在 K 上的最小多项式.

2. 如果 $x\in E$ 是 K 上的超越元素, 证明映射 $K(X)\to E : R\mapsto R(x)$ 是分式域 $K(X)$ 到域 $K(x)$ 的同构映射.

第I部分: 导子及其初等性质

- 域 K 上的一个运算符 $D:K\to K$ 如果满足如下条件, 则称其为**导数运算**或**导子**:

$$\forall u,v\in K, D(u+v)=D(u)+D(v), D(uv)=D(u)v+D(v)u$$

- 域 K 连同其导子 D 构成一个**微分域**; 我们记 $K_{cst}=\{u\in K\,|\,D(u)=0\}$ 并称其为 K 的**常数子域**.

1. $D(1)$ 等于什么? 对任意的 $(u,v)\in K\times K^*$ [注1], 试用 $u,v,D(u),D(v)$ 表示 $D(u/v)$.
同样的问题: 如果 $(u,n)\in K\times\mathbb{N}$ 或 $(u,n)\in K^*\times\mathbb{Z}$, 用 $u,n,D(u)$ 表示 $D(u^n)$.
验证 K_{cst} 确实是 K 的一个子域. 设 $u\in K^*$, 我们称运算 $D(u)/u$ 为**对数导数**, 它有什么性质? 在什么条件下会有 $D(u)/u=D(v)/v$?
2. 设多项式 $P=\sum_i a_iX^i\in K[X]$, 我们将多项式 $\sum_i D(a_i)X^i$ 记为 P^D , 将 P 的(代数上的)导式记为 P' , 即 $P'=\sum_i ia_iX^{i-1}$. 对于 $u\in K$, 验证 $D(P(u))=P'(u)D(u)+P^D(u)$.
3. 我们称 K 上的一个多项式为**无平方因子**多项式, , 如果它是一个或几个互不相同的不可约多项式的乘积. 也就是说, 一个**无平方因子**多项式的质因式分解中各因子的次数都是1. 设 D 是定义在有理分式域 $K(X)$ 上的导子, 并且满足 $D(K[X])\subset K[X]$. 考虑 $K[X]$ 中有限个非零无平方因子多项式 $(Q_j)_{j\in J}$, 它们两两互质, 并且有另外两个互质的多项式 P,Q 满足等式

$$\sum_{j\in J}\frac{P_j}{Q_j}=D(\frac{P}{Q}), P_j, P\in K[X], Q\in K[X]\backslash\{0\}, \gcd(P,Q)=1$$

证明 $Q\,|\,D(Q)$, 然后证明如果对于某个 $j\in J$, Q_j 与 Q 互质, 那么 $Q_j\,|\,P_j$.

第II部分: $K(X)$ 上的对数型导子

- 一个微分域 K 的**微分扩域** E 是一个包含 K 的微分域, 其导子 D 是 K 上的导子在 E 上的延拓, 并且 E 与 K 有同样的常数子域, 即 $D(K)\subset K$, 且 $E_{cst}=K_{cst}$.

在这一部分我们考虑有理分式域 $K(X)$ 及其导子 D 使得 $K(X)$ 是 K 的微分扩域, 并且 $D(X)\in K$.

1. 设 $P=\sum_i a_iX^i\in K[X]$; 借助 $D(P)$ 的表达式(参见第I部分: 问题2), 证明 $D(P)\in K[X]$ 并比较 $D(P)$ 和 P 的次数. 在什么情况下会有 $\deg D(P)<\deg P$?
2. 满足什么条件的首一多项式 $Q\in K[X]$ 能够整除 $D(Q)$? 满足什么条件的多项式 $P\in K[X]$ 能够满足 $D(P)\in K$?

[注1]译注: 带星号的集合如 $K^*,\mathbb{R}^*$ 等表示集合除去乘法的不可逆元素, 对于域 K , 我们就有 $K^*=K\backslash\{0\}$.

3. 设 R 是 $K(X)$ 中的有理分式, 并且 $D(R) \in K$, 证明 $R = cX + g$ 其中 $c \in K_{cst}, g \in K$.

- 在微分域 K 中, 我们把能够表示成如下形式的元素称为 K 中的**Liouville 和**:

$$D(g) + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{D(f_i)}{f_i}, g \in K, c_i \in K_{cst}, f_i \in K\backslash\{0\}.$$

4. 设 $f \in K$; 我们假定 f 是 $K(X)$ 中的Liouville 和, 证明存在 $c \in K_{cst}$ 使得 $f - cD(X)$ 是 K 中的Liouville 和. 为此, 根据 $K(X)$ 中的Liouville 和的定义, 我们首先证明, f 可以写成如下形式:

$$f = D(R) + \sum_{i \in I} c_i \frac{D(f_i)}{f_i} + \sum_{j \in J} d_j \frac{D(Q_j)}{Q_j},$$

其中 $R \in K(X), f_i \in K\backslash\{0\}, c_i, d_j \in K_{cst}$, $Q_j \in K[X]\backslash\{0\}$ 是彼此不同, 次数不为零, 不可约的首一多项式. 然后我们用第I部分:问题3

- 在一个微分域 K 中, 我们说 $v \in K$ 是 $u \in K\backslash\{0\}$ 的**对数**, 如果 $D(v) = D(u)/u$ (设想公式 $(\log u)' = u'/u$).
- K 的微分扩域 E 被称为**对数型**的, 如果满足 $E = K(v)$, 其中 $v \in E$ 是 $u \in K\backslash\{0\}$ 的对数.

5. 设 $E = K(v)$ 是 K 的对数型微分扩域, 假定 v 是在 K 上超越的, 证明**Liouville 归约定理**: 如果 $f \in K$ 是 E 中的Liouville 和, 则 f 必是 K 中的Liouville 和. 为此, 我们通过 $K(X) \leftrightarrow E$ 的同构映射将 E 上的导数运算转化成 $K(X)$ 上的导数运算(问题**0.2**) 然后应用上一问题的结果.

第III部分: $K(X)$ 上的指数型导子

在这一部分我们考虑有理分式域 $K(X)$ 上满足如下条件的导数运算 D :

$$K(X)\text{是}K\text{的微分扩域, 并且}\frac{D(X)}{X} \in K.$$

以上条件的前半部分可以理解为 $D(K) \subset K$ 且 $K(X)_{cst} = K_{cst}$ (特别地, $D(X) \neq 0$).

1. 设 $P \in K[X]$, 证明 $D(P) \in K[X]$ 并比较两个多项式的次数.
2. 设 $P \in K[X]$, 证明 P 整除 $D(P)$ 当且仅当 $P = aX^n$, 其中 $a \in K$.
3. 设 $R \in K(X)$ 是有理分式, 证明如果 $D(R) \in K[X]$, 那么或者 $R \in K_{cst}$, 或者 R 是与 $D(R)$ 有相同次数的多项式(特别地, 如果 $D(R) \in K$, 那么 $R \in K$).
4. 设 $f \in K$ 是 $K(X)$ 中的Liouville 和, 证明 $\exists c \in K_{cst}$ 使得 $f - cD(X)/X$ 是 K 中的Liouville 和.

- 在微分域 K 中, 我们称 $v \in K\backslash\{0\}$ 是 $u \in K$ 的**指数**, 如果 $D(v)/v = D(u)$ (设想 $(e^u)' = u'e^u$).
- 微分域 K 的扩域 E 被称为**指数型**的, 如果 $E = K(v)$, 其中 $v \in E$ 是某元素 $u \in K$ 的指数.

5. 设 $E = K(v)$ 是指数型扩域, 并假定 v 是 K 上的超越元素. 叙述并证明与**II.5** 类似的Liouville 归约定理.

第IV部分: 有限维扩充域中的范数(Norme), 迹(Trace), 以及归约定理

在这一部分, K 表示一个包含有理数集 $\mathbb{Q}$ 的域; E 是 K 的一个 n 维向量空间, u 是 E 上的线性变换, 我们用 $\chi_u(T)$ 表示 u 的特征多项式即 $\chi_u(T)=\det(TI_E-u)\in K[T]$, 用 $\Omega_u(T)\in K[T]$ 表示多项式 $\frac{\chi_u(T)-\chi_u(0)}{T}$, 用 $u^{\#}$ 表示映射 $(-1)^{n-1}\Omega_u(u)$.

1. 设 A 是 u 在某组基底下的矩阵, 证明在同一组基底下 $u^{\#}$ 的矩阵 $A^{\#}$ 是 A 的伴随矩阵(首先考虑 u 可逆的情况, 然后对某些 $\lambda\in K$ 考虑映射 $u-\lambda I_E$).
2. 设 E 是 K 的一个有限维扩域, 我们定义两个映射: $\mathrm{tr}:E\to K$ (迹), $N:E\to K$ (范数)如下:

   $$\mathrm{tr}(x)=\mathrm{tr}(m_x),N(x)=\det(m_x),\text{其中}m_x=y\mapsto xy\text{表示对}E\text{的每个元素乘以}x\text{的变换}$$

   验证 tr 是线性映射; 当 $\lambda\in K$ 时 $\mathrm{tr}(\lambda)$ 等于什么? 对任意 $x,y\in E$ 验证 $N(xy)=N(x)N(y)$; 当 $\lambda\in K$ 时 $N(\lambda)$ 等于什么?
   设 $x\in E$, 证明存在唯一的 $x^{\#}\in E$ 使得 $(m_x)^{\#}=m_{x^{\#}}$. 证明等式 $x^{\#}x=xx^{\#}=N(x)$.
3. 设 D 是 K 上的导数运算; 对于 $A=(a_{i,j})\in M_n(K)$, 用 $D(A)$ 表示矩阵 $(Da_{i,j})$, 证明 $D(\det A)=\mathrm{tr}(A^{\#}D(A))$.
4. 设 D 是 E 上的导数运算并且满足 $D(K)\subset K$. 证明 $\forall x\in K,\mathrm{tr}(D(x))=D(\mathrm{tr}(x))$. 为此, 我们选定 E 的一组基底 $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}(n=\dim_K E)$, 有唯一的线性变换 $\Delta:E\to E$ 满足 $\Delta(e_i)=D(e_i)$ (注意, D 不是 $K-$ 向量空间 E 上的线性变换); 设 $(a_{i,j})$ 是 m_x 在基底 $\mathcal{B}$ 下的矩阵, $m_x^D:E\to E$ 是矩阵 $(D(a_{i,j}))$ 定义的线性变换, 证明:

   $$(*)\qquad m_x\circ\Delta+m_{D(x)}=\Delta\circ m_x+m_x^D$$

   然后得出结论.
5. 证明 $\mathrm{tr}(x^{\#}D(x))=D(N(x))$ (我们可以用上一问题中确定的基底 $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, 和等式 $(*)$). 然后证明下列结论:

   $$\forall x\in E\backslash\{0\},\frac{D(N(x))}{N(x)}=\mathrm{tr}\left(\frac{D(x)}{x}\right).$$

6. 叙述并证明有限维扩充域上的Liouville 归约定理.

第V部分: Liouville/Ostrowski 定理

1. 设 E 是 K 的微分扩域, 若 $x\in E$ 是 K 上的代数元, 证明 $D(K(x))\subset K(x)$.
   - K 的一个微分扩域 E 被称为**初等扩张**, 如果存在 E 的一列子域 $(K_i)_{0\le i\le m}$ 满足:

     $$K=K_0\subset K_1\subset K_2\subset\ldots\subset K_{m-1}\subset K_m=E$$

     其中 K_{i+1} 要么是 K_i 的有限维扩张, 要么存在 $v_{i+1}\in K_{i+1}$ 是 K_i 中某元素的指数或对数, 使得 $K_{i+1}=K_i(v_{i+1})$. 再次指出, E 和 K 有同样的常数子域.
2. 设 f 属于某微分域 K , 假设 f 的原函数存在于 K 的某初等扩域 E 中, 即 $\exists g\in E$ 使得 $D(g)=f$. 证明 f 是 K 中的Liouville 和. 这就是**Liouville/Ostrowski 定理**(它将 K 的某扩域 E 中的性质转换成 K 中的性质).

第VI部分: $\int e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 不是初等函数

设 K 是微分域, $u \in K$; 为了简化记号, 我们用 e^u 表示 u 的所有出现在 K 的某个微分扩域中的指数函数, 同样用 $\log(u)$ 表示 u 的所有对数函数.

1. 我们回到第III部分开头的假定. 设 $f \in K$, 证明 Xf 是 $K(X)$ 中的Liouville 和当且仅当存在 $g \in K$ 使得 $f = D(g) + gD(X)/X$. 假设 K 还是它的子域 k 的分式域 $k(T)$, 并附带通常意义下的导数运算[注2], 证明如果 f 和 $D(X)/X$ 都属于 $k[T]$, 那么 $g \in k[T]$ (即如果 f 和 $D(X)/X$ 都是关于 T 的多项式, 那么 g 也是 T 的多项式).
2. 设 E 是 K 的微分扩域; 我们考虑 $v \in E$ 使得 $D(v) \in K$ (比如当 $v = \log(u), u \in K\backslash\{0\}$ 时). 证明如果 $v \notin K$, 那么 v 在 K 上是超越的. 类似方式证明, 除非对某个正整数 n 使得 nu 是 K 中另一个元素的对数, 否则 e^u 是 K 上超越的(两种情况都可以考虑 v 的最小多项式, 并使用反正法).
3. 我们考虑通常的微分域 $K = \mathbb{C}(T)$. 证明 $\mathbb{C}(T)$ 中的非常数元素在 $\mathbb{C}(T)$ 中没有对数, 然后得出如下结论: 如果 $u \in \mathbb{C}(T)$ 不是常数, 那么 e^u 在 $\mathbb{C}(T)$ 上是超越的.
4. 证明**Liouville 判别法**: 设 $f \in \mathbb{C}(T), u \in \mathbb{C}(T)\backslash\mathbb{C}$, 那么 fe^u 在 $\mathbb{C}(T)$ 的某个初等扩域中有原函数当且仅当 $\exists g \in \mathbb{C}(T)$ 使得 $f = g' + gu'$. 进一步, 如果 f, u 是多项式, 那么 g 也是多项式, 并且 $\deg u \leq 1 + \deg f$.
5. 得出结论: $\int e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 不是初等函数(即它不属于 $\mathbb{C}(T)$ 的任何初等扩域).

[注2]译注: 这里原题中的表述并不明确, 实际上指的是 $k = K_{cst}, D(T) = 1$, 即我们通常所理解的针对 T 的导数. 见下面的问题3和问题4.