测度与积分理论简明教程

田鹏

2014 年 7 月 27 日

目录

绪论：从面积到测度，从黎曼积分到勒贝格积分

0.1 对面积的回顾

本书主要讨论测度与积分理论，而提到这两个概念，就不得不提到我们从小学就开始接触的长度、面积、体积三个概念．那么我们不妨首先回顾一下从小学到现在我们对这三个概念的认识过程．

我们对于这三个概念的认识实际上都来源于日常生活经验，比如，一根棍子有多长，一间屋子面积是多少，一个杯子可以装多少毫升的水，即使没有上过学的人都知道这些概念的意义．但是，真正从数学角度稍微深刻地认识这些概念是离不开学校教育的，比如，作为长度的实数可以是有理数，也可以是无理数，两条线段不一定存在公比线段（称一条线段是另外两条线段的公比线段，如果那两条线段都是这条线段的整数倍），等等．因此，我们对于长度的认识基本上和对实数的认识是同步的：中学生学过实数的概念之后，就理所当然地认为，每一条线段都对应一个正实数作为长度，如果有很多小线段首尾连接在一起，得到的整条线段的长度必然是这些小线段的长度之和．但是，我们从来没有考虑过，数轴上一个支离破碎的点集，比如，$[0,1]$ 中的所有有理数构成的点集，它是否有长度？它的长度是多少？

再来回顾面积与体积的认识过程，由于这两个概念很相似，我们现在只对面积来讨论．在中小学，我们的老师是怎么向我们介绍面积和体积的呢？现行小学教材是这样定义面积的：**物体的表面——平面图形的大小，它们叫做平面图形的面积．**体积的概念与此类似，都是表示几何物体在它所在的空间中占有的空间大小．但实际上这只是大略地描述面积的用途，不是严格定义，具体怎样定义占有空间的大小，定义里没有直接说，所以，还需要对一个基本的具体图形定义它的面积，这就是矩形面积，我们规定矩形的面积公式为长乘以宽，而后通过割补、拼凑等方法，利用矩形面积公式推导出平行四边形与三角形的面积公式，又通过将圆分割成很多扇形，再把这些扇形重新摆放拼接成一个近似的长方形，从而证明圆的面积是一半的周长乘以半径．然后，我们就被要求通过各种分割组合变换的手法去求各种奇形怪状的集合体的面积了，相信不少读者都曾对“求阴影部分面积”这种问题感到很头痛．

通过这样的过程很容易让人有一种观念，那就是无论什么样的图形，无论多复杂，一定是有一个面积的．然而，现在让我们反思一下这个“定义面积”的过程，似乎开始有了疑问：我们怎么能够确定通过这些公式计算出的数字就一定能够反映物体“占地多少”呢？矩形的

面积为什么一定是“长乘以宽”呢？在我们的观念中，面积既然是表示图形占地多少的量度，那么就应该满足一些基本性质（为了叙述清晰，以下只要提到“基本性质”，指的就是以下三条性质）：

a) 面积应该是非负数，并且存在面积非零的图形；
b) 同样的图形面积应该也相同；
c) 几个无重叠图形的总面积应该是各个图形的面积之和.

这三条性质还可以推出另外一条比较重要的性质：如果一个图形 A 能够完全覆盖另一个图形 B，那么 A 的面积应该比 B 的大.

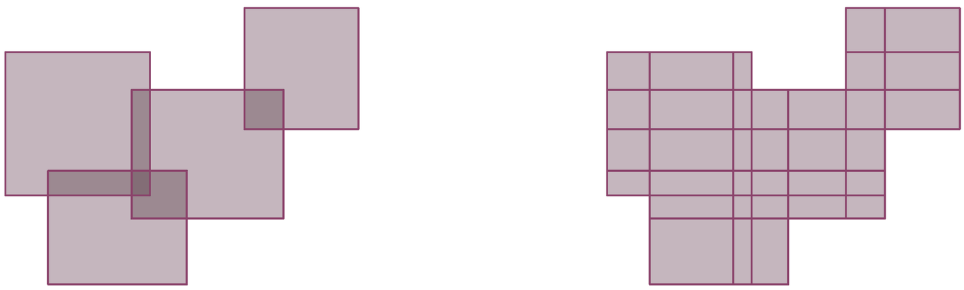
然而，似乎矩形面积公式是人为定义出来的，其它的各种图形面积公式都是以矩形面积为基础，通过割补法得出的. 这些公式表达出的面积是否真的符合基本性质？这是很值得怀疑的.

依稀记得小学课本里解释长方形面积时，画了一个矩形，其两边长都为整数，它被分割成很多边长为一的正方形格子，格子的数目正好是两边长度的乘积. 由此，我们领悟到，矩形的面积和线段长度的定义定义方式类似：我们定义长度时，首先要选择一条线段作为单位线段，规定其长度为 1，那么我们定义面积时也要选择单位面积，不妨选择边长为 1 的正方形作为单位面积图形，然后用这个单位面积去丈量其它图形，设 R 是一个两边长分别为 a 和 b 矩形，如果 a, b 都是整数，那么在 R 内可以既不重叠又不留缝隙地铺满 $a \times b$ 个单位面积，根据基本性质，R 的面积应该等于 $a \times b$；如果 a, b 不是整数而是其它有理数，比如 $a = 1/p, b = 1/q$，其中 p, q 为正整数，那么把单位正方形的一个边均分成 p 段，另一边均分成 q 段，则单位正方形正好是 pq 个长宽分别为 a, b 的小矩形构成，同样根据基本性质，这些全等的小矩形的面积要相等，并且面积之和应该等于 1，所以它们的面积都等于 $1/(pq) = ab$，这样也决定了，当 a, b 是任意有理数时，矩形的面积公式依然成立；当 a, b 是一般实数时，因为任意实数都可以用有理数数列进行逼近，所以矩形面积公式对任意边长都是成立的，从而，那些通过矩形面积计算出来的其它图形的面积公式也都可以得到合理的解释. 我们虽然没有严格证明这些公式计算出的面积是否真的满足我们的基本要求，但是在生活常识的影响下，我们倾向于认为所有的平面图形都自然而然地要有一个面积满足基本性质.

学了黎曼积分之后，可以让我们计算面积的图形多了起来，其本质还是以矩形面积为基础去计算其它图形的面积. 但却第一次遇到了“无法求面积”的图形，比如 $[0, 1]$ 区间上的狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1 & x\text{为有理数} \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}$ 的图象与 x 轴之间所夹的点集，由于此函数不可积，我们就无法求出它的面积，甚至没有任何办法可以定义这个图形的面积，我们的朴素面积观被颠覆了，面积不是平面图形与生俱来的属性，而是一个需要定义的量：只有当一个图形可以被分拆成有限个曲边梯形，并且每个曲边梯形对应的函数可积，我们才说这个图形是有面积的，并且把它的面积定义为各个积分的和. 比如，单位圆被 x-轴分割成两个全等的半圆，在 x-轴上方的半圆对应函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$，它是黎曼可积的，那么我们就说圆的面积等于 $2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$.

有些学生可能学过 Jordan 测度，这是数学家 Jordan 引进的一种定义面积、体积的方

法，由于此方法与定义勒贝格测度的方法十分类似，又与黎曼积分的定义有联系，这里有必要加以介绍．仅以面积为例，如果 E 是一个平面图形，用 $\mu(E)$ 表示它的面积．首先考虑一个半开半闭的矩形 $R=[x_1,x_2)\times[y_1,y_2)$，如前所述，一个矩形的面积等于长宽乘积，平面内的一条线段可以看成宽度为零的矩形，所以，线段的面积为零，从而半开半闭矩形的面积也是长宽乘积：$\mu(R)=|(x_2-x_1)(y_2-y_1)|$；而后，有限多个这样半开半闭矩形的并集 $S=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_k$ 称为简单集，那么简单集的面积也可以定义了：因为每一个这样的简单集 S 都可以分割成有限个两两不交的半开闭矩形的并（见下图，图片来自维基百科），那



(a) 简单集是有限个半开半闭矩形的并集

(b) 它可以分割成不交半开闭矩形的并

图 1: 简单集示例（图片来自维基百科）

么 S 的面积 $\mu(S)$ 就可以定义成这些不交矩形面积之和．可以证明，这样定义出的简单集的面积只与简单集本身有关，而与它的分割方式无关，并且它确实满足基本性质．这个做法，与本书要介绍的勒贝格测度的做法是通用的，具体的证明可以查阅本书相关章节或任意一本实变函数书．接下来，对于任何一个有界图形 E，假设我们可以给它指定一个面积 $\mu(E)$，那么对于任何包含在 E 内的简单集 S，都有 $\mu(E)\geq\mu(S)$，从而 $\mu(E)\geq\sup\limits_{S\subset E}\mu(S)$，我们把这个等式右边的数称为 E 的 Jordan 内测度，并记为 $\mu_*(E)$；同样，对于任何包含 E 的简单集 S，都有 $\mu(E)\leq\mu(S)$，从而 $\mu(E)\leq\inf\limits_{S\supset E}\mu(S)$，我们把这个等式右边的数称为 E 的 Jordan 外测度，并记为 $\mu^*(E)$．也就是说，假设 E 存在面积，那么这个面积必然是 $m_*(B)$ 和 $m^*(B)$ 之间的一个数．所以，当 E 满足 $\mu^*(E)=\mu_*(E)$ 时，我们称 E 在 Jordan 意义下可求面积，并把 E 的内外测度指定为 E 的面积．这种做法分别可以在一维、二维、三维甚至更多维空间中使用，从而定义长度、面积、体积的概念，我们统一将一般维数空间中的相应概念称为测度，Jordan 意义下可求测度的点集称为 Jordan 可测集．由于任何图形的测度都可以看成是简单集合测度的极限，所以对测度基本性质的证明就完全可以归结为简单集的测度的基本性质，然后再取极限，以这样的方式可以证明，Jordan 定义的测度满足基本性质．另外，f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积当且仅当它的达布上下积分相等，这在本质上要求 f 下面的曲边梯形是 Jordan 可测的．到此，我们已经解决了生活中常见的平面图形的面积定义问题，但那个狄利克雷函数定义的图形仍然没有面积．

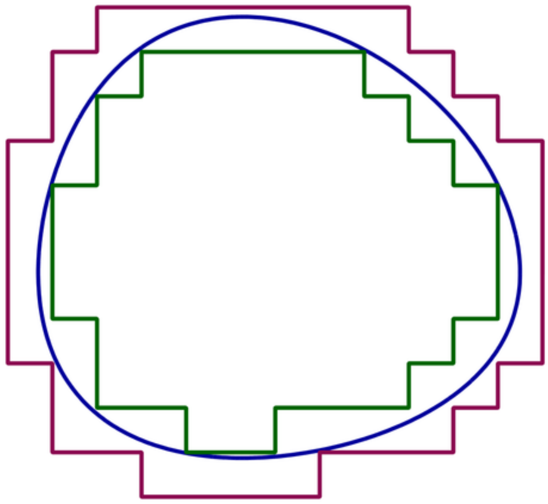


图 2: Jordan 测度定义示例（图片来自维基百科）

0.2 积分的物理与几何意义

我们为什么要计算那些奇怪图形的面积？为什么要计算抛物线、双曲线、指数函数线下的面积？相信很少有人以纯粹几何的目的计算这些积分，而更多的时候是为了积分的另一种意义：一个维度上的物理量在另一个维度上的积累．

考虑这方面一个最典型的问题：一段长度为 l，质地粗细都均匀的绳子，其线密度（即单位长度绳子的质量）为 ρ，问它的总重量是多少？这个问题很简单，就是 ρl．现在，考虑一段长度为 l 质地均匀，但粗细不均的绳子，那么其横截面积和线密度都是变化的，且两者成一个固定的比例：横截面积大的地方线密度也大，横截面小的地方线密度也小．将绳子拉直平放在 x-轴的 $[0, l]$ 区间上，一方面，如果 $f(x)$ 表示绳子在点 x 处的横截面积，那么积分 $\int_0^l \rho(x)\,\mathrm{d}x$ 可以计算出绳子的总体积．但另一方面，在忽略一个常数因子的前提下，$f(x)$ 也可以表达线密度，用同样的积分也可以计算出绳子的总质量．可见，积分中蕴含的不只是几何意义上的面积、体积等概念，还有比面积、体积更加广义的东西：如果知道一个量在某个空间 X 中分布的密度函数 f，则积分 $\int_X f(x)\,\mathrm{d}x$ 就表示此物理量在 X 中积累的总量，例如，速度在时间上的积累就是位移；密度在空间上的积累就是质量；概率密度在某个事件上的积累就是该事件的概率，等等．

我们可以把测度的概念进一步推广，不论是面积、体积，还是某个量在某空间中积累的总量，都可以称为**测度**．所谓测度，就是“测量、量度”．比如，在一块钢板上割下一部分，我们想知道割下部分钢板的质量，那么这个质量的数值，就是一种测度．如果整块钢板的密度、厚度都均匀，则割下部分的质量就只与它的面积成正比，而与切割的具体位置、形状、方向无关，那么质量就同样满足上面所说的基本性质；但是，当钢板的面密度不均匀时，割下的钢板质量就是密度函数在切割范围内的积累，就要用积分计算，那么这个质量除了与面积有关，还与切割位置、形状等有关，两块形状全等的钢板不一定会有相同的质量，所以，它

不满足基本性质的第二条，但我们依然把它看成一种测度，也就是我们本书中要论述的推广了的测度.

用积累的观点看面积、体积与积分，我们可以说，当我们定义了最基本的线段长度之后，所谓的面积，就是一个维度上的长度在另一个维度上的积累；所谓体积，就是二维的面积在第三维度上的积累，它们都可以归结为测度的概念. 为了方便，可以把长度理解为常值密度 1 在一维空间的某个子集上的积累，因此也可以称为测度. 而积分，就是计算测度的基本工具.

0.3 为何要扩展 Jordan 测度和黎曼积分

Jordan 测度已经足够给我们常见的图形定义测度，所对应的黎曼积分也足以应付常见函数的积分问题，只是在 Jordan 定义的测度理论中，有些集合是没有测度的，比如，$[0,1]$ 中的所有有理点构成的集合 $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. 所对应的，$[0,1]$ 上的狄利克雷函数不是黎曼可积的. 那么为什么要扩展这两个概念，使得这些奇形怪状的到处都不连续的集合有测度呢？

如果单单考虑具体的函数，确实很难理解这样做的动机，尽管通过扩展测度与积分使更多的集合可测、更多的函数可积只有好处没有坏处，比如如果我能知道狄利克雷函数在 $[0,1]$ 上的积分，我就能知道一个在 $[0,1]$ 上随机取值的变量等于有理数的概率是多少，但单个的实例无法提供足够的动力去建立一整套更复杂的系统.

这样做带来的最大好处，是构造了一种完备的积分. 为了理解这种完备性，让我们首先做个类比：在日常生活中，其实只要有理数就够用了，即使在理论上，会有诸如单位正方形的对角线长、单位圆的周长等需要无理数乃至超越数的地方，但是我们无论如何也不可能画出一个 100% 精确的圆或者正方形，现实世界的数字也几乎不可能完全精确的，在最终使用的时候都要取一定的近似值，所以抛弃无理数，只保留有理数的数学对我们来讲也并无不可. 但是无理数的引入使得整个实数集构成了一种完备的数系，只有在这个完备数系中，极限、微积分等数学分析内容才得以轻松建立. 所以，无理数乃至复数的引入不仅在精确性上完善了数学体系，也在方法上简化了上层理论体系的建立. 回到积分理论，传统的黎曼积分是不完备的，这体现在一列可积函数的极限，即使有界，也不一定是黎曼可积的. 比如，狄利克雷函数就是一列可积函数的极限：因为有理数集是可数的，我们设序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是自然数到 $[0,1]$ 上的有理数集的一一映射，令 $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\{a_1,\dots,a_n\}\\ 0 & \text{其它情况}\end{cases}$ 则 f_n 逐点收敛到 $[0,1]$ 上的狄利克雷函数. 显然每个 f_n 都是分段连续函数，所以是黎曼可积的，但它们的极限——狄利克雷函数却不是. 这样导致的问题就是，极限与积分换序公式 $\int_X \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n$ 成立的条件不好判断：传统的分析教材中要求 f_n 要一致收敛，才能保证等式成立. 而用勒贝格积分理论，只需要找到一个勒贝格可积函数 F，使得对所有的 n 和几乎所有的 $x\in X$，$|f_n(x)|\le F(x)$ 成立，那么积分与极限换序的等式就成立，这就是勒贝格控制收敛定理. 比如，考察函数列 $f_n(x)=x^n$，由于对任意自然数 n 和任意 $x\in[0,1]$ 都有 $|f_n(x)|\le 1$，那么可以直接下结论说 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. 这个例子当然十分简单，其它更复杂的例子还有很多，大多数都无法通过逐项求原函数用牛顿 -莱布尼茨公式解决，那么依照传统

数学分析教材的做法，就需要分段讨论这个极限的一致收敛性了，需要的过程就会更加繁琐．值得提到的是，Arzela 在勒贝格积分发表之前就提出过一个黎曼积分版的控制收敛定理 [1]：

定理 0.3.1 (Arzela 控制收敛定理). *设 f_n 是一列在 $[a,b]$ 上黎曼可积的函数列，并逐点收敛到黎曼可积函数 f，如果存在一个非负函数 k 使得 $\int k<\infty$，且对所有的 n，不等式 $|f_n|\leq k$ 恒成立，那么 $\int f_n\to\int f$.*

注意到在这个定理中，除了要保证函数列的每一项都是黎曼可积之外，还要保证它们的极限函数也是黎曼可积的，这一点在验证起来是比较困难的．而在勒贝格积分理论的框架下，可积函数序列的极限函数总是可积的，因此有更加简洁的勒贝格控制收敛定理．另外，在黎曼积分的框架内要想证明 Arzela 定理并不容易．而在勒贝格积分理论下，此定理只是勒贝格控制收敛定理的一个特例，因为所有的黎曼可积函数也都是勒贝格可积函数．

0.4 如何扩展测度和积分

那么，勒贝格是如何做的呢？[1]第一步，他还是致力于扩展长度、面积、体积的概念，因此，他并没有一开就像如今的教科书那样在抽象的集合上定义广义的测度，而是只考虑欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的某些有界点集，称为（勒贝格）可测集，他要给每一个可测集都指定一个非负实数作为它的测度，使得：

a) 至少存在一个集合的测度非零；
b) 两个全等的点集测度相等；
c) 有限或可数多个两两不交点集之并集的测度是这些点集测度之和．

他要构造的测度要满足这样三条性质，与我们前面所说的基本性质比较起来，前两条是一模一样的，只是在第三条中，勒贝格要求他定义的测度有“可数可加性”：在 Jordan 版本中，只要求“有限个互不重叠的点集，它们的并集的测度是这些点集测度之和”，而勒贝格把“有限个”进一步加强到“可数多个”．然后，勒贝格分别就一维、二维与三维的情形讨论“线测度”、“面测度”和“体积”．比如，对于平面上的情形，假设我们可以给一个有界点集 E 定义测度，那么首先需要对这个测度的大致范围进行估计．与 Jordan 的做法类似，勒贝格也定义了 E 的内测度 $\mu_*(E)$ 与外测度 $\mu^*(E)$，并且定义一个集合可测当且仅当它的内外测度相等．不同的是，由于勒贝格已经假定它的测度有可数可加性，那么他可以考虑用可数多个矩形覆盖 E；而在定义内测度时，有时候不可能在 E 内做出任何矩形，比如，包含在矩形 $[0,1]\times[0,1]$ 中的所有有理点（两坐标为有理数的点）集、无理点集等处处稠密却又处处不连续的集合，不可能包含任何一个矩形．解决的办法是先找一个大矩形 R 使得 $E\subset R$，然后定义 E 的内测度为 R 的测度减去 $R\backslash E$ 的外测度（如图3）．随后，勒贝格指明，这样定义的内测度与矩形 R 的选择无关，并且一个集合的内测度永远小于它的外测度．如果集合 E 的内外测度相等，我们就说 E 是可测的，并且内外测度的公共值就作为 E 的测度．最后，勒贝格证明，这样定义出的测度满足他所列的三条性质．

[1]这里转述的是勒贝格在 1903 年所写的论文《Intégrale, longueur, aire》（参考文献 [2]）中的做法，为了方便论述，笔者在某些步骤上有少许改动．

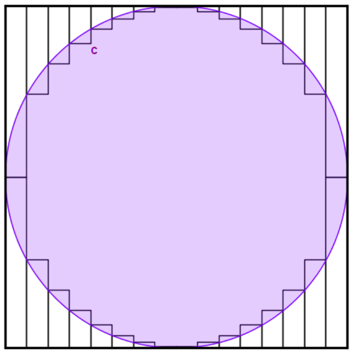


图 3: 内测度的定义

为什么这样做可以给更多集合定义测度呢？Jordan 测度和勒贝格测度的做法都是用尽可能少的已知图形的测度去定义尽可能多的集合的测度，比如，只把半开半闭的线段、矩形或矩体的测度当成原始定义的测度，然后通过有限的几条规则去推知尽可能多的其它图形的测度，看看这些原始定义的测度加上一些规则能在多大范围内决定其它集合的测度．二者所采用的基础集合类相同，但勒贝格用的扩展规则更强，所以，他定义的内测度和外测度能够更加准确地逼近一个图形的固有属性．比如，在两种测度中，单点集都是具有零测度的，但集合 $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ 按照 Jordan 的标准是不可测的，但按勒贝格的标准，这个点集是可数个单点构成的，它的测度是这些单点集测度之和，因此为零．

对于积分，以闭区间 $[a,b]$ 上有界函数 f 为例，传统的黎曼积分把定义域分割为很多小区间，设小区间端点为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$，然后计算达布上和 $S(f)=\sum_{i=0}^{n}\sup_{\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$ 与达布下和 $s(f)=\sum_{i=0}^{n}\inf_{\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$，当网眼长度 $\max_i\{|x_{i+1}-x_i|\}$ 趋于 0 时，如果两个和式 $S(f),s(f)$ 趋向同一个极限，则称 f 黎曼可积，并将此极限称为 f 在 $[a,b]$ 上的积分．那么 f 越接近于连续，它在每个 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的变化幅度越会随着区间长度减小而减小，和式 $S(f)$ 和 $s(f)$ 就越有可能趋向于相等；但当 f 的性态很糟糕时，不论网眼的长度有多小，f 将始终在每个小区间中都激烈震荡，比如，狄利克雷函数 $D(x)$ 在任意长度的小区间中总能取到 0 和 1 两个值，和式 $S(f)$ 将始终为 1，而 $s(f)$ 始终为 0，$D(x)$ 就不是黎曼可积的．

为了解决这个问题，勒贝格提出，与其分割定义域 $[a,b]$，不如分割 f 的值域（如图4）：设 $f(x)\in[-M,M]$，那么我们把区间 $[-M,M]$ 分成小区间，令 $-M=y_0<y_1<\cdots<y_{n+1}=M$，设区间 $[y_i,y_{i+1}]$ 的原像为 $E_i=\{x\in[a,b]\,|\,f(x)\in[y_i,y_{i+1}]\}$，并且每个 E_i 都可测，那么记 E_i 的测度为 $m(E_i)$．可以断定，当区间 $[y_i,y_{i+1}]$ 很小时，和式 $S(f)=\sum_{i=0}^{n}y_{i+1}m(E_i)$ 与和式 $s(f)=\sum_{i=0}^{n}y_im(E_i)$ 的差值 $S(f)-s(f)=\sum_{i=0}^{n}(y_{i+1}-y_i)m(E_i)$ 也会很小．事实上，不管如何分割，总是有 $\sum_{i=0}^{n}m(E_i)=b-a$，因此，$0\le S(f)-s(f)=\sum_{i=0}^{n}(y_{i+1}-y_i)m(E_i)\le$

$\max_i(y_{i+1}-y_i)\sum_{i=0}^{n}m(E_i)=\max_i(y_{i+1}-y_i)(b-a)$，当 $\max_i(y_{i+1}-y_i)\to 0$ 时，不管 f 性态如何，上下和总是收敛到相同的极限，这个极限就可以定义为此函数在 $[a,b]$ 上的勒贝格积分.

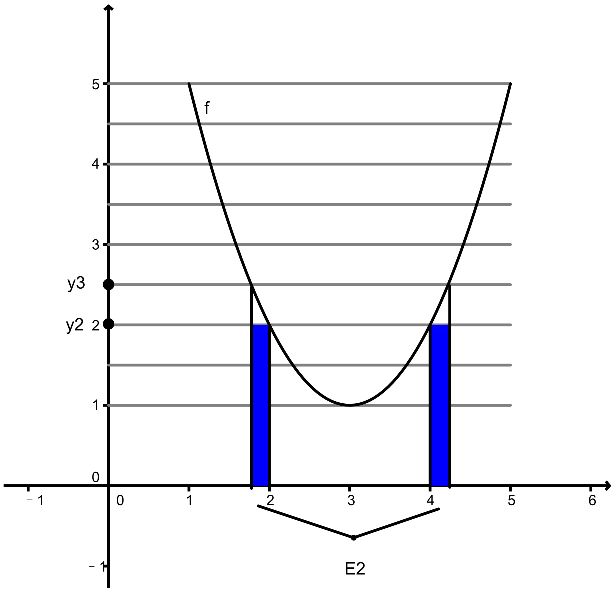


图 4: 勒贝格积分

用这个观点考察狄利克雷函数 $D(x)$ 在某个区间 $[a,b]$ 上的积分，发现和式 $s(D)$ 始终为零，而 $S(D)=y_1\to 0$，从而 $D(x)$ 在任何区间上都是勒贝格可积的，并且积分为零.

第一章 测度理论

在绪论中我们已经初步了解了定义测度的大体思路，但还有很多细节需要进一步完善. 从本章开始，我们就进入正题. 本章测度理论的基本知识为主要内容，以构造勒贝格测度和概率测度为基本目的，让读者一边学习抽象理论，一边以实例的形式学习怎样从一维的长度概念扩展出勒贝格测度，怎样从基本事件概率扩展出其它事件的概率.

1.1 集合类、集合序列的极限

设 X 是我们要讨论的全集，它可以是一维空间 $\mathbb{R}^1$，可以是多维空间 $\mathbb{R}^n$，也可以是其它抽象一些的空间，例如概率中的样本空间. 我们要给 X 的某些子集赋予一个实数值，这个数值要能够体现该子集在整个空间中所占据部分的“大小”，比如，一维空间中的长度、二维的面积、三维的体积，还有样本空间中一个事件的概率大小，这种子集与实数的对应关系可以理解为定义在 X 的某个子集类 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ 取值在 $\mathbb{R}$ 上的集合函数，称为测度. 但是我们不清楚是否可以给 X 的每个子集都指定测度，所以通常的做法是先在 X 的某一个较小的子集类上定义好测度，然后再通过某种规则把这个测度延拓到更大的子集类. 例如，在绪论中已经讨论到的勒贝格测度：先定义半开半闭矩形的测度，再把这个测度扩展到其它集合；又如，在有可数个样本点的离散概率空间中，先定义基本事件的概率，再通过概率的可加性公理确定其它事件的概率. 为了讨论测度的性质和测度延拓的可行性，我们需要先研究测度的定义域，这就是我们本节要讨论的各种集合类.

在本章讨论中，正体大写字母如 A, B, X, Y 等表示普通集合，花体字母如 $\mathscr{C}, \mathscr{A}, \mathscr{S}$ 等表示集合类，比如 X 的某些子集构成的集合可以记做 $\mathscr{S}$. 另外在这一节中不涉及测度的正式定义，只讨论测度的定义域作为集合类的一些性质及其扩展过程，本节所提及的“测度”完全是方便读者理解，读者可以结合绪论中关于测度思想的背景知识理解本节中的“测度”.

定义 1.1.1 (半环). 设 $X \neq \emptyset$，$\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$ 是 X 的某些子集构成的非空集合类. 称 $\mathscr{S}$ 为 **X 上的半环**或简称**半环**，如果它满足：

a) $\emptyset \in \mathscr{S}$

b) $\mathscr{S}$ 对有限个集合的交运算封闭，即

$$\forall (A, B) \in \mathscr{S}^2, A \cap B \in \mathscr{S}$$

c) $\forall (A, B) \in \mathscr{S}^2$，$A - B$ 可以表示成 $\mathscr{S}$ 中有限个集合的不交并.

半环结构刻画了测度的最小定义域，我们从无到有地构造一个空间中的测度时，可以先把测度建立在一个半环上，比如：

例 1.1.2. 设 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，我们用 $[a,b)$ 简记集合 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x<b\}$，则所有这样的区间构成的集合类 $\mathscr{S}=\{[a,b)\in\mathscr{P}(\mathbb{R})\}$ 是一个半环.

证明. 注意到 $\emptyset=[0,0)$，因此 $\emptyset\in\mathscr{S}$，$\mathscr{S}$ 满足半环定义的第一条性质.

对任意 $(A,B)\in\mathscr{S}^2$，不妨设 $A=[a,b),B=[c,d)$，则

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x<b,c\leq x<d\}\\&=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\max(a,c)\leq x<\min(b,d)\}\\&=[\max(a,c),\min(b,d))\\&\in\mathscr{S}\end{aligned}$$

因此 $\mathscr{S}$ 对两个集合的交运算封闭. 以下证 $A-B$ 是 $\mathscr{S}$ 中有限个集合的不交并. 当 $c\geq d$ 时 $B=[c,d)=\emptyset$，此时 $A-B=A$，命题成立；当 $c<d$ 时，

$$\begin{aligned}A-B&=[a,b)-[c,d)\\&=[a,b)\cap((-\infty,c)\cup[d,+\infty))\\&=([a,b)\cap(-\infty,c))\cup([a,b)\cap[d,+\infty))\\&=[a,\min(b,c))\cup[\max(a,d),b)\end{aligned}$$

$[a,\min(b,c))$ 和 $[\max(a,d),b))$ 都是 $\mathscr{S}$ 中的元素，又因为 $c<d$ 所以 $\min(b,c)\leq c<d\leq\max(a,d)$，故 $[a,\min(b,c))\cap[\max(a,d),b)=\emptyset$，从而 $A-B$ 是 $\mathscr{S}$ 中两个集合的不交并.

综上，$\mathscr{S}$ 是一个半环. □

思考题 1.1.1. 直观地看绪论中的图*1*可知，n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的半开半闭方体的集合

$$\mathscr{S}=\{[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)\}$$

也是半环，但这个命题可以一般化为下面的命题，请尝试证明之，并由此推出以上结论：
设 X,Y 为两个非空集合，$\mathscr{A},\mathscr{B}$ 分别为 X,Y 的一族子集构成的半环，证明 $X\times Y$ 的子集族

$$\mathscr{S}=\{A\times B\,|\,A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}$$

为半环.

下面的例子应用在概率论中，就是离散概率空间的基本事件构成的集合：

例 1.1.3. 设 $X\neq\emptyset$，X 的单点集与空集构成的集合 $\mathscr{S}=\{\{x\}\,|\,x\in X\}\cup\{\emptyset\}$ 构成半环.

如果能够在半环上定义出测度，那么下一步，就是要运用测度的规则进行第一次延拓：通过半环内的集合之间相互交叉、分割、拼补等方式来给一些新集合定义测度. 这些新的集合与原来的集合一起可以构成一种叫做环的结构：

定义 1.1.4 (环). 设 $X \neq \emptyset$，$\mathscr{R} \subset \mathscr{P}(X)$ 是 X 的某些子集构成的非空集类．如果 $\mathscr{R}$ 对集合的并、差运算封闭，即

$$\forall (A,B) \in \mathscr{R}^2, \quad A \cup B \in \mathscr{R}, A - B \in \mathscr{R}$$

则称 $\mathscr{R}$ 是 X 上的**环**或简称 $\mathscr{R}$ 是**环**.

例. X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 是一个环.

命题 1.1.5. 若 $\mathscr{R}$ 是环，则

$$\forall (A,B) \in \mathscr{R}^2, \quad A \cap B \in \mathscr{R}, A \triangle B \in \mathscr{R}$$

证明. 由 $A \cap B = A - (A - B)$，$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$，以及环的定义立即可得. □

由这个命题得知，实际上环的概念包括了半环的概念：所有的环都是半环，但半环却不一定是环，比如，前面举出的半环的几个例子都对集合的并运算不封闭．但是，我们可以考虑由半环中有限个集合之并构成的集类，例如，绪论中提及的简单集构成的集类，这个集类就是环了．再由绪论中图1下面的说明，我们可以用半环中有限个两两不交集合之并构成环：

命题 1.1.6. 若 $\mathscr{S}$ 是半环，那么集类

$$r(\mathscr{S}) \triangleq \left\{ \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \,|\, A_i \in \mathscr{S}, n \in \mathbb{N}, \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \right\}$$

是一个环，称为由半环 $\mathscr{S}$ **生成的环**.

证明. 设 $(A,B) \in r(\mathscr{S})^2$，首先证明集类 $r(\mathscr{S})$ 对差运算封闭，即 $A - B \in r(\mathscr{S})$．由半环的定义，存在自然数对 $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ 以及有限个集合 $(A_i \in \mathscr{S})_{i \in [[1,n]]}, (B_j \in \mathscr{S})_{j \in [[1,m]]}$ 使得 $A = \bigsqcup_{i \in [[1,n]]} A_i, B = \bigsqcup_{j \in [[1,m]]} B_j$．我们对 m 应用数学归纳法：

- 当 $m = 1$ 时，$B = B_1$，由于 $\mathscr{S}$ 是半环，所以对任意 $i \in [[1,n]]$，$A_i - B_1$ 是 $\mathscr{S}$ 中有限个集合的不交并，因此设 $A_i - B_1 = \bigsqcup_{j \in J_i} C_i$，其中 $C_j \in \mathscr{S}$，且由于各 A_i 之间两两不交，$A_i - B_1$ 之间也两两不交，从而 $A - B = \bigsqcup_{i \in [[1,n]]} (A_i - B) = \bigsqcup_{i \in [[1,n]]} \bigsqcup_{j \in J_i} C_i \in r(\mathscr{S})$.
- 假设命题对 $m = k \in \mathbb{N}$ 成立，则当 $m = k+1$ 时，$A - B = A - \bigsqcup_{j \in [[1,k+1]]} B_j = (A - B_{k+1}) - \bigsqcup_{j \in [[1,k]]} B_j$，已经证明 $A - B_{k+1} \in r(\mathscr{S})$，再根据归纳假设，$(A - B_{k+1}) - \bigsqcup_{j \in [[1,k]]} B_j \in r(\mathscr{S})$，即 $A - B \in r(\mathscr{S})$.
- 综上，$r(\mathscr{S})$ 对两集合的差运算封闭.

由于 $A \cup B = (A - B) \sqcup B$，而 $A - B \in r(\mathscr{S})$ 因此是 $\mathscr{S}$ 中有限个集合的不交并，所以 $A \cup B$ 也是 $\mathscr{S}$ 中有限个集合的不交并，故 $A \cup B \in r(\mathscr{S})$，$r(\mathscr{S})$ 对集合的并运算也封闭. □

由于环对集合的并运算封闭，所以实际上 $r(\mathscr{S}) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \,|\, A_i \in \mathscr{S}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

思考题 1.1.2.

a) 讨论在例*1.1.3*中定义的，离散空间基本事件构成的半环 $\mathscr{S}$ 生成的环是什么集类？

b) 绪论中提到的简单集（即平面（或空间）中有限个左开右闭矩形（或矩体）之并构成的集类）是否构成环？它怎样从左开右闭区间构成的半环产生出来的？

如果能把半环 $\mathscr{S}$ 上定义的测度延拓到环 $r(\mathscr{S})$，那么对于环 $r(\mathscr{S})$ 中的任意两个集合 A, B，不但它们本身有个自的测度，而且它们的交集、并集、差集都是有测度的．但是，$r(\mathscr{S})$ 中毕竟只包含了一些简单集，这样的测度还没有什么大用处．接下来，就是运用勒贝格扩展测度的方法，将环上的测度进一步扩展到 σ-环或 σ-域，使得可数个可测集的交、并集也都是可测集：

定义 1.1.7 (σ-环，σ-域)**.** 设 $X \neq \emptyset$，$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ 是 X 上的环．如果对任意的 $(A_n \in \mathscr{F})_{n\in\mathbb{N}}$，都有 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$，那么称 $\mathscr{F}$ 为 **σ-环**．如果还有 $X \in \mathscr{F}$，则称 $\mathscr{F}$ 为 **σ-域**或 **σ-代数**．

由定义可见，σ-域是含有全集的 σ-环，σ-环是对可数并运算封闭的环．

例 1.1.8. 幂集 $\mathscr{P}(X)$ 既是 X 上的 σ-环，又是 X 上的 σ-域．

命题 1.1.9. σ-环对可数交运算封闭．

证明． 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的 σ-环，$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathscr{F}$ 中的一列元素，设 $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$，根据 σ-环的定义，$A \in \mathscr{F}$．将 A 看成全集并应用德摩根定律，我们有 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = A - \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A - A_n)$．又由 σ-环的性质，有 $A - A_n \in \mathscr{F}, \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A - A_n) \in \mathscr{F}, A - \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A - A_n) \in \mathscr{F}$，即 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$． □

由简单的逻辑推理可知，如果 $\mathscr{R}, \mathscr{S}$ 都是 σ-环，那么它们的交集 $\mathscr{R} \cap \mathscr{S}$ 也是 σ-环，并且这个结论可以推广为：任意多个 σ-环的交集也是 σ-环．设 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个子集族，考虑包含 $\mathscr{A}$ 的所有 σ-环的交集 $r_\sigma(\mathscr{A}) = \bigcap\limits_{\mathscr{F}\text{是}\sigma\text{-环，且}\mathscr{A}\subset\mathscr{F}} \mathscr{F}$，按刚才的论述，$r_\sigma(\mathscr{A})$ 也是个 σ-环，并且满足

a) $\mathscr{A} \subset r_\sigma(\mathscr{A})$，

b) 所有包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-环都包含 $r_\sigma(\mathscr{A})$．

可以证明，对于每个 $\mathscr{A}$，满足这样两条性质的 σ-环 $r_\sigma(\mathscr{A})$ 是唯一的，因为如果还有一个 σ-环 $\mathscr{F}$ 也满足上述两条性质，那么根据第二条，同时有 $r_\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F} \subset r_\sigma(\mathscr{A})$，所以 $\mathscr{F} = r_\sigma(\mathscr{A})$．于是对于子集族 $\mathscr{A}$，我们就把上述定义的 $r_\sigma(\mathscr{A})$ 称为由 $\mathscr{A}$ **生成的 σ-环**．

这样的讨论过程也同样适用于环和 σ-域，并且定义任意一个集类 $\mathscr{A}$ 生成的环（记为 $r(\mathscr{A})$）和生成的 σ-域（记为 $\sigma(\mathscr{A})$），并且证明，当 $\mathscr{A}$ 为半环的时候，这种方式定义的 $r(\mathscr{A})$ 与命题1.1.6中给出的构造性定义是等价的，请读者自行讨论．

命题 1.1.10. 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 为两个集类，如果 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$，则 $r(\mathscr{A}) \subset r(\mathscr{B}), r_\sigma(\mathscr{A}) \subset r_\sigma(\mathscr{B}), \sigma(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{B})$．

证明. 以 $r_\sigma(\mathscr{A}) \subset r_\sigma(\mathscr{B})$ 为例，其它类同. 由于 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \subset r_\sigma(\mathscr{B})$，所以 $r_\sigma(\mathscr{B})$ 是包含 $\mathscr{A}$ 的 σ-环，根据 $\mathscr{A}$ 生成的 σ-环的定义，$r_\sigma(\mathscr{B})$ 也包含 $r_\sigma(\mathscr{A})$. □

例. *设 X 为一可数集，$\mathscr{S}$ 是例1.1.3中定义的半环，那么 $r_\sigma(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{S}) = \mathscr{P}(X)$；如果用 $\mathscr{S}$ 生成的环 $r(\mathscr{S})$ 再生成 σ-环或 σ-域，得到的结果也是 $\mathscr{P}(X)$.*

证明. 显然，对任意集合类 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$，都有 $r_\sigma(\mathscr{S}) \subset \mathscr{P}(X), \sigma(\mathscr{S}) \subset \mathscr{P}(X)$. 下面针对具体实例 $\mathscr{S}$ 证明反过来的包含关系. 由于 X 是可数集，故 $\forall A \in \mathscr{P}(X)$，$A$ 是至多可数集，因此是至多可数个单点集的并，根据 σ-环对有限或可数并运算的封闭性，有 $A \in r_\sigma(\mathscr{S})$ 和 $A \in \sigma(\mathscr{S})$，故 $\mathscr{P}(X) \subset r_\sigma(\mathscr{S}), \mathscr{P}(X) \subset \sigma(\mathscr{S})$，等式因此成立. 对于 $r(\mathscr{S})$，因为 $\mathscr{S} \subset r(\mathscr{S})$，所以根据命题1.1.10，有 $\mathscr{P}(X) = r_\sigma(\mathscr{S}) \subset r_\sigma(r(\mathscr{S}))$ 以及 $\mathscr{P}(X) = \sigma(\mathscr{S}) \subset \sigma(r(\mathscr{S}))$，另一个方向的包含关系是显然的，命题得证. □

思考题 1.1.3.

a) *这个例子中的现象是否有普遍性？即如果先用半环生成环，再用环生成 σ-环或 σ-域，和直接用半环生成 σ-环或 σ-域，得到的结果是否总是相等？即是否总有 $r_\sigma(r(\mathscr{S})) = r_\sigma(\mathscr{S})$ 和 $\sigma(r(\mathscr{S})) = \sigma(\mathscr{S})$？*

b) *当 X 为不可数集时，例1.1.3中的半环 $\mathscr{S}$ 生成的 σ-环和 σ-域分别是什么？*

在实数域中，有数列极限的概念，它从严格的数学角度描述了一列数字的变化趋势，如果说一个数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限是 a，那么可以直观地理解为，随着下标 n 不断增大，数列的元素 a_n 与 a 的距离可以要多小有多小. 对于一列集合 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$，我们也可以定义极限的概念，若 A_n 的极限为 A，则表示随着 n 的增大，集合 A_n 与 A 越来越趋向于包含相同的元素. 为了便于读者理解，我们先讨论单调集合列的极限：

定义 1.1.11. 设 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列集合，

a) 如果 A_n 单调递增，即如果 $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$，则定义集合列 A_n 的极限为

$$\lim_{n\to\infty} A_n \triangleq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

b) 如果 A_n 单调递减，即如果 $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$，则定义集合列 A_n 的极限为

$$\lim_{n\to\infty} A_n \triangleq \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

可以理解，当集合列 A_n 单调递增时，随着 n 的增大，集合 A_n 包含越来越多的元素，那么它们的并集就代表了一种“最终状态”；而对于单调递减的集合列，随着 n 的增大 A_n 排出了越来越多的元素，“最终状态”自然就由它们的交集所代表. 将集合的包含关系看成是比较集合大小的一种序，即将集合的包含符号 $\subset$ 类比于实数中的 $\leq$，将 $\supset$ 类比于 $\geq$，那么单调的集合列总是有极限的，正如在实数域中，单调的序列一定有极限（包括 $+\infty$ 与 $-\infty$）. 但是在一般的情况下，不论是实数列，还是集合列，其极限是不一定存在的. 这时，我们需要通过集合列的上下极限的概念来描述变化趋势：

定义 1.1.12. 设 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列集合，它的上、下极限分别定义为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \triangleq \bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \triangleq \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

当 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 时，称集合列 A_n 的极限存在，将这两个相等的集合定义为 A_n 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

容易看出，当集合列 A_n 单调时，两种定义给出的极限完全吻合，因此定义1.1.12确实扩展了定义1.1.11. 那么，在一般情况下，怎样理解集合列的上下极限呢？首先还是类比于实数中上下极限的概念，实数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的上极限是怎么定义的呢？实际上，我们要首先定义 a_n 的"上数列" $\overline{a_n} = \sup\limits_{k\geq n} a_k$，然后定义数列 a_n 的上极限为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n}$. 由于对任意数列 (a_n)，$\overline{a_n}$ 都是一个单调递减数列，所以实际上 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a_n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{a_n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\sup\limits_{k\geq n} a_k$. 同样的方式可以理解集合列 A_n 的上极限的定义：首先定义它的上集合列，注意到对于集合的序关系 $\subset$ 来说，一列集合的上确界就是比这个序列中每一个都大的最小集合，自然就应该是这列集合的并集，因此 $\overline{A_n} = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$，接下来，由于 $\overline{A_n}$ 是单调递减的，它的极限就已经归结为单调序列的情形了，这就是上极限有如此定义的原因. 下极限的定义遵循同样的道理.

我们已经从形式上基本理解了集合列的上下极限的概念，但有时这是不够的，毕竟，A_n 的上下极限是由交并运算混合定义的，只从形式上理解还很难把握它们的生成过程. 有时，将集合的语言与逻辑的语言相互转换是有帮助的，比如，一列集合 A_n 的并集 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ 可以用逻辑语言 $\exists n\in\mathbb{N}$ s.t. $x\in A_n$ 来描述，那么怎样用逻辑语言描述 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 与 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 呢？首先来看上极限 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$，我们由外而内一层一层地分析，先将 $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 看成一个整体，那么 $x\in\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 等价于 $\forall n\in\mathbb{N}, x\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$；然后分析内层：$x\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 等价于 $\exists k\geq n$ s.t. $x\in A_k$；两层合起来，我们得到以下几个等价命题：

a) $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$;
b) $\forall n\in\mathbb{N}, \exists k\geq n$ s.t. $x\in A_k$;
c) 存在 A_n 的子列 A_{n_k} 使得 $x\in A_{n_k}$;
d) 存在无穷多个下标 n 使得 $x\in A_n$.

基于同样的方法分析下极限 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，我们也得到几个等价命题：

a) $x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$;
b) $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\geq N, x\in A_n$;
c) 仅有有限个下标 n 使得 $x\notin A_n$.

因此，我们很容易得出如下的包含关系：$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

思考题 1.1.4. 集合的对称差集 $A\triangle B$ 可以表示两个集合 A, B 之间的某种差异，可以把它类比为两个集合之间的"距离"，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ 是否等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n\triangle A) = \emptyset$?

σ-环的最大的好处就是对可数并、交运算的封闭性，从而对集合的极限运算也是封闭的. 如果能够把测度扩展到一个 σ-环，那么一列可测集经过可数交、并运算之后仍然可测，从而这列集合的上、下极限仍然可测；如果极限存在，则极限也是可测的.

思考题 1.1.5. 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列非负实数，用这列非负实数构造一列半开半闭区间 $[0,a_n)$，证明如下关系式：

a) $[0, \varlimsup_{n\to\infty} a_n) \subset \varlimsup_{n\to\infty} [0,a_n) \subset [0, \varlimsup_{n\to\infty} a_n]$
b) $[0, \varliminf_{n\to\infty} a_n) \subset \varliminf_{n\to\infty} [0,a_n) \subset [0, \varliminf_{n\to\infty} a_n]$

并分别讨论每个 $\subset$ 取等号的条件.

对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的非负函数 f，定义函数下方图形 $D_f \triangleq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, y\in[0,f(x))\}$，以及函数图象 $G_f \triangleq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, y=f(x)\}$. 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一列定义在 $\mathbb{R}$ 上的非负函数，逐点收敛到函数 f，即 $\forall x\in\mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，证明如下关系式：

$$D_f \subset \varliminf_{n\to\infty} D_{f_n} \subset \varlimsup_{n\to\infty} D_{f_n} \subset D_f \cup G_f$$

1.2 乘积空间中的半环与 σ-环，Borel 域

在上一节，我们只在同一个空间中讨论了各种集合类的构造，与之对应的实例也只有一维空间 $\mathbb{R}$ 上的半环扩充成环再扩充成 σ-环或 σ-域的过程，在更高维的空间中，我们还没有严格地证明半开半闭的矩体可以构成半环（仅以思考题的形式出现在第一节中），也没有讨论这个半环生成的 σ-域与一维空间 $\mathbb{R}$ 的 σ-域之间的关系，这一节就来回答这些问题.

首先，一维空间上的半环 $\mathscr{S}$ 不仅能够生成 σ-域，还能通过半环的一种“乘积运算”在二维空间中自动构造出一个半环，用这个半环又可以在二维空间中生成一个 σ-域.

定义 -命题 1.2.1 (半环的乘积). 设 X,Y 为两个非空集合，$\mathscr{A},\mathscr{B}$ 分别为 X,Y 的一族子集构成的半环，则 $X\times Y$ 的子集族

$$\mathscr{A}\odot\mathscr{B} \triangleq \{A\times B \,|\, A\in\mathscr{A}, B\in\mathscr{B}\}$$

为笛卡尔积 $X\times Y$ 上的半环，称为半环 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的**半环积**.

证明. 因为 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 都是半环，所以都含有空集 $\emptyset$，因此 $\emptyset=\emptyset\times\emptyset\in\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$；若 $A_1,A_2\in\mathscr{A}, B_1,B_2\in\mathscr{B}$，则 $A_1\times B_1\cap A_2\times B_2 = (A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)\in\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$；下面分析 $\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ 中两个集合的差集：由于 $A_1=(A_1\cap A_2)\sqcup(A_1-A_2)$，故

$$\begin{aligned}
A_1\times B_1 - A_2\times B_2 &= \{(x,y)\in X\times Y \,|\, (x\in A_1, y\in B_1)\ 但(x\notin A_2\ 或 y\notin B_2)\} \\
&= \{(x,y)\in X\times Y \,|\, (x\in A_1-A_2, y\in B_1)\ 或(x\in A_1\cap A_2, y\in B_1-B_2)\} \\
&= (A_1-A_2)\times B_1 \sqcup (A_1\cap A_2)\times(B_1-B_2)
\end{aligned}$$

由于 A_1-A_2 和 B_1-B_2 分别是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 中有限个集合的不交并，所以 $(A_1-A_2)\times B_1$ 和 $(A_1\cap A_2)\times(B_1-B_2)$ 是 $\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ 中有限个集合的不交并，从而 $A_1\times B_1-A_2\times B_2$ 亦然，命题得证. □

由于集合 $\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ 的定义方式并不要求 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是半环，而且这样的集合出现在很多与"积空间"有关的概念中，比如，当 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 分别是 X,Y 上的拓扑时，集合 $\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ 是积空间 $X\times Y$ 上的拓扑基，所以为了简化记号，我们也在一般的情况下使用运算符 $\odot$.

既然低维空间中的半环可以通过乘积 $\odot$ 得到高维空间中的半环，那么低维空间中的环，σ-环或 σ-域，是否也能通过乘积运算扩展到高维空间中？即如果 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是两个环（或 σ-环，或 σ-域），那么集合 $\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ 是否也是 $X\times Y$ 上的环（或 σ-环，或 σ-域）呢？简单思考一下便可否定这样的猜测，因为笛卡尔积 $A\times B$ 在高维空间中的样子总是"方方正正"的，如果一个集类只包括这样的笛卡尔积，那么它一般情况下没有对集合的并、差运算的封闭性．所以即使 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 具有更高级的结构，它们经过 $\odot$ 运算之后也只能退化成半环（这也就是本书要引入半环概念的原因之一）．既然 $\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ 是半环，那么根据上节讨论的内容，我可以马上用它生成环、σ-环和 σ-域等高级结构，因此下面的定义是顺理成章的：

定义 -命题 1.2.2 (σ-环的乘积). 设 X,Y 为两个非空集合，$\mathscr{A},\mathscr{B}$ 分别为 X,Y 的一族子集构成的 σ-环，则称 $\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ 生成的 σ-环

$$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\triangleq r_\sigma\left(\{A\times B\,|\,A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B}\}\right)$$

为 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的 **σ-环乘积**.

注意到当 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 两者都是 σ-域时，它们的 σ-环乘积自动给出了 $X\times Y$ 上的 σ-域．有读者可能会问，为什么我们没有定义环的乘积，而直接从半环乘积跳跃到 σ-环乘积了呢？下面的命题表明，环的乘积已经没有必要了，因为我们可以直接用半环生成 σ-环和 σ-域，不需要以环为中间的过渡环节了.

命题 1.2.3. 设 $\mathscr{S}$ 是 X 上的半环，则 $r_\sigma(r(\mathscr{S}))=r_\sigma(\mathscr{S}),\sigma(r(\mathscr{S}))=\sigma(\mathscr{S})$.

证明. 由 $\mathscr{S}\subset r(\mathscr{S})$ 推出 $r_\sigma(\mathscr{S})\subset r_\sigma(r(\mathscr{S})),\sigma(\mathscr{S})\subset\sigma(r(\mathscr{S}))$；另一方面，因为 $r_\sigma(\mathscr{S}),\sigma(\mathscr{S})$ 都是包含 $\mathscr{S}$ 的环，所以 $r(\mathscr{S})\subset r_\sigma(\mathscr{S}),r(\mathscr{S})\subset\sigma(\mathscr{S})$，从而 $r_\sigma(r(\mathscr{S}))\subset r_\sigma(\mathscr{S}),\sigma(r(\mathscr{S}))\subset\sigma(\mathscr{S})$. □

设 X,Y 为两个非空集合，$\mathscr{A},\mathscr{B}$ 分别为 X,Y 上的半环，那么仍然有两种方法生成 $X\times Y$ 上的 σ-环，其一是用半环积 $\mathscr{A}\odot\mathscr{B}$ 生成，其二是先让 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 分别在个自的空间中生成 σ-环，然后再做 σ-环的乘积 $r_\sigma(\mathscr{A})\otimes r_\sigma(\mathscr{B})$，这两种方法结果是否一样呢？

命题 1.2.4. 设 X,Y 为两个非空集合，$\mathscr{A},\mathscr{B}$ 分别为 X,Y 的非空集族，那么 $r_\sigma(\mathscr{A})\otimes r_\sigma(\mathscr{B})=r_\sigma(\mathscr{A}\odot\mathscr{B})$.

证明. 由于 $\mathscr{A}\odot\mathscr{B}\subset r_\sigma(\mathscr{A})\odot r_\sigma(\mathscr{B})$，我们有

$$\begin{aligned}r_\sigma(\mathscr{A}\odot\mathscr{B})&\subset r_\sigma(r_\sigma(\mathscr{A})\odot r_\sigma(\mathscr{B}))\\&=r_\sigma(\mathscr{A})\otimes r_\sigma(\mathscr{B})\end{aligned}$$

为了证明另一个方向的包含关系，我们分两步走：首先，对于任意固定的 $A \in \mathscr{A}$，证明 $\{A \times B \,|\, B \in r_\sigma(\mathscr{B})\} \subset r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\})$，再对任意固定的 $B \in r_\sigma(\mathscr{B})$ 证明 $\{A \times B \,|\, A \in r_\sigma(\mathscr{A})\} \subset r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\})$，这样，我们就证明了，对任意的 $A \in r_\sigma(\mathscr{A}), B \in r_\sigma(\mathscr{B})$ 都有 $A \times B \in r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\})$，即 $r_\sigma(\mathscr{A}) \odot r_\sigma(\mathscr{B}) \subset r_\sigma(\mathscr{A} \odot \mathscr{B})$，从而 $r_\sigma(\mathscr{A}) \otimes r_\sigma(\mathscr{B}) = r_\sigma(r_\sigma(\mathscr{A}) \odot r_\sigma(\mathscr{B})) \subset r_\sigma(\mathscr{A} \odot \mathscr{B})$，这样就完成了证明.

对于任意固定的 $A \in \mathscr{A}$，如果 $A = \emptyset$，则 $\{A \times B \,|\, B \in r_\sigma(\mathscr{B})\} = \{\emptyset\}$，显然有我们要证的结论；如果 $A \neq \emptyset$，我们在集合类 $\{A \times B \,|\, B \in \mathscr{P}(Y)\}$ 与 $\mathscr{P}(Y)$ 之间建立一个一一对应关系 $\varphi : A \times B \mapsto B$，那么显然集合的交、并运算以及包含关系在 φ 的映射下保持不变，所以，如果 $\{A \times B \,|\, B \in \mathscr{P}(Y)\}$ 的某个子集构成 σ-环，则它在 φ 作用下的像也是 σ-环，反之亦然．而我们知道 $\varphi(\{A \times B \,|\, B \in \mathscr{B}\}) = \mathscr{B}$，那么由于 $r_\sigma(\mathscr{B})$ 是包含 $\mathscr{B}$ 的最小 σ 环，可知 $\varphi^{-1}(r_\sigma(\mathscr{B})) = \{A \times B \,|\, B \in r_\sigma(\mathscr{B})\}$ 也是包含 $\{A \times B \,|\, B \in \mathscr{B}\}$ 的最小 σ-环，因此

$$\{A \times B \,|\, B \in r_\sigma(\mathscr{B})\} = r_\sigma(\{A \times B \,|\, B \in \mathscr{B}\}) \subset r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}) \tag{1.1}$$

这样，$\forall A \in \mathscr{A}, \forall B \in r_\sigma(\mathscr{B})$，都有 $A \times B \in r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\})$，所以

$$r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in r_\sigma(\mathscr{B})\}) \subset r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}) \tag{1.2}$$

与(1.1)相同的推理过程应用于固定的 $B \in r_\sigma(\mathscr{B})$，可证明

$$\{A \times B \,|\, A \in r_\sigma(\mathscr{A})\} = r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}\}) \subset r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in r_\sigma(\mathscr{B})\}) \tag{1.3}$$

从而，$\forall A \in r_\sigma(\mathscr{A}), \forall B \in r_\sigma(\mathscr{B})$，都有 $A \times B \in r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in r_\sigma(\mathscr{B})\})$，综合(1.2)，有 $A \times B \in r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\})$，即

$$\{A \times B \,|\, A \in r_\sigma(\mathscr{A}), B \in r_\sigma(\mathscr{B})\} \subset r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\})$$

从而

$$r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in r_\sigma(\mathscr{A}), B \in r_\sigma(\mathscr{B})\}) \subset r_\sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\})$$

这就是要证的结论. □

思考题 1.2.1. *对于 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 生成的 σ-域，是否有 $\sigma(\mathscr{A}) \otimes \sigma(\mathscr{B}) = \sigma(\mathscr{A} \odot \mathscr{B})$?*

下面讨论在积分理论和概率论中都非常重要的概念：Borel-域，或称 Borel-代数.

如果我们已经在 $\mathbb{R}$ 上的某个 σ-域上建立了测度，为了能按勒贝格的方式计算连续函数 f 的积分（见绪论），就要把 f 的值域分解成 $[y_i, y_{i+1})$ 型的小区间，那么就需要原像 $f^{-1}([y_i, y_{i+1})$ 在定义域里是可测集．我们知道在连续映射下开集的原像是开集，闭集的原像是闭集，虽然半开半闭区间 $[y_i, y_{i+1})$ 既不是开集也不是闭集，但每一个开区间都可以写成可数多个半开半闭区间的并：$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, b)$；每一个闭区间也可以写成可数多个半开半闭区间的交：$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, b + 1/n)$．所以，如果所有半开半闭区间的原像都可测，那么所有开区间、闭区间的原像也都要可测．这就预示着，我们扩展出的可测集 σ-域包括开集和闭集.

定义 1.2.5 (Borel 域). 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，$\mathscr{T}$ 是 X 的开集族，我们将 $\mathscr{T}$ 生成的 σ-域 $\sigma(\mathscr{T})$ 称为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 上的 **Borel 域**或 **Borel 代数**，记为 $\mathcal{B}(X)$，其中的元素称为 X 上的 Borel 集.

由于 X 本身是开集，所以有 $\mathcal{B}(X)=r_\sigma(\mathscr{T})=\sigma(\mathscr{T})$，又由于所有的闭集都是开集的余集，所以闭集也是 Borel 集.

命题 1.2.6. 如果拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 有一个可数的拓扑基，即存在 $\mathscr{T}$ 的可数子集 $\mathscr{T}_1$ 使得 $\mathscr{T}$ 中的所有开集都是 $\mathscr{T}_1$ 中某些集合的并，则 $\mathcal{B}(X)=r_\sigma(\mathscr{T}_1)$.

证明. 一方面，由于 $\mathscr{T}\supset\mathscr{T}_1$，所以 $r_\sigma(\mathscr{T})\supset r_\sigma(\mathscr{T}_1)$；另一方面，$\mathscr{T}$ 中的每一个开集都可以表示成 $\mathscr{T}_1$ 中某些开集的并集，但 $\mathscr{T}_1$ 本身是可数集，因此 $\mathscr{T}$ 中的每一个开集都可以表示成 $\mathscr{T}_1$ 中可数个集合的并集，即任意开集 $\Omega\in\mathscr{T}$，存在 $(\Omega_n\in\mathscr{T}_1)_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\Omega=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$，因此 $\Omega\in r_\sigma(\mathscr{T}_1)$，即 $\mathscr{T}\subset r_\sigma(\mathscr{T}_1), r_\sigma(\mathscr{T})\subset r_\sigma(\mathscr{T}_1)$. 综上，有 $\mathcal{B}(X)=r_\sigma(\mathscr{T})=r_\sigma(\mathscr{T}_1)$. □

推论 1.2.7. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是由以下几个集合类生成的 σ-环：

- $\mathscr{S}_1=\{(a,b)\in\mathscr{P}(\mathbb{R})\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$
- $\mathscr{S}_2=\{(a,b)\in\mathscr{P}(\mathbb{R})\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$
- $\mathscr{S}_3=\{[a,b)\in\mathscr{P}(\mathbb{R})\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$

证明. 因为 $\mathscr{S}_1$ 是一维欧氏空间 $\mathbb{R}$ 的可数拓扑基，所以 $r_\sigma(\mathscr{S}_1)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$；又因为 $\mathscr{S}_1\subset\mathscr{S}_2$ 且 $\mathscr{S}_2$ 中的元素都是开集因此都是 Borel 集，所以 $\mathcal{B}(\mathbb{R})=r_\sigma(\mathscr{S}_1)\subset r_\sigma(\mathscr{S}_2)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$，故 $\mathcal{B}(\mathbb{R})=r_\sigma(\mathscr{S}_2)$；由于当 $a\geq b$ 时 $[a,b)=\emptyset$，当 $a<b$ 时 $[a,b)=(a,b)\cup\{a\}$ 而所有单点集都是闭集因此是 Borel 集，则 $\mathscr{S}_3$ 中所有元素都是 Borel 集，从而 $r_\sigma(\mathscr{S}_3)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$，反过来的包含关系来源于所有的开区间 (a,b) 都是可数个半开半闭区间 $[a+1/n,b)$ 的并集，故 $\mathcal{B}(\mathbb{R})=r_\sigma(\mathscr{S}_2)\subset r_\sigma(\mathscr{S}_3)$，因此 $r_\sigma(\mathscr{S}_3)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

命题 1.2.8. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$，从而 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ 是由半开半闭矩形族生成的 σ-环.

证明. 在本命题证明中我们沿用推论1.2.7中的记号 $\mathscr{S}_1,\mathscr{S}_2,\mathscr{S}_3$. 由于 $\mathbb{R}^2$ 可以看成是两个一维空间 $\mathbb{R}$ 的拓扑积空间，且由于 $\mathscr{S}_1$ 是 $\mathbb{R}$ 的可数拓扑基，故 $\mathscr{S}_1\odot\mathscr{S}_1$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的可数拓扑基（参见 [5]），根据命题1.2.6，有 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=r_\sigma(\mathscr{S}_1\odot\mathscr{S}_1)$，再根据命题1.2.4，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=r_\sigma(\mathscr{S}_1\odot\mathscr{S}_1)=r_\sigma(\mathscr{S}_1)\otimes r_\sigma(\mathscr{S}_1)=\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

从而，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)=\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})=r_\sigma(\mathscr{S}_3)\otimes r_\sigma(\mathscr{S}_3)=r_\sigma(\mathscr{S}_3\odot\mathscr{S}_3)$，而 $\mathscr{S}_3\odot\mathscr{S}_3$ 就是半开半闭矩形族. □

1.3 测度的基本概念与性质

从本节开始，我们正式讨论测度. 在绪论中，我们已经大概知道了测度应该满足的一些基本性质，那么可以用这些性质给测度一个严格的公理化定义. 由于环、σ-环等都是半环，所以只需要定义好什么是半环上的测度就可以了.

定义 1.3.1 (测度). 设 $\mathscr{S}$ 是 X 上的半环，μ 是定义在 $\mathscr{S}$ 上，取值在 $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ 上的集合函数．如果 μ 满足如下条件，则称其为半环 $\mathscr{S}$ 上的测度：

a) $\mu(\emptyset)=0$

b) 即对任意 $A\in\mathscr{S}$，如果存在 $\mathscr{S}$ 中的集合序列 $(A_n\in\mathscr{S})_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $A=\bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$，则

$$\mu(A)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$$

注.

- 测度是定义在环 $\mathscr{S}$ 取值在 $\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ 上的集合函数，对于特殊元素 $+\infty$，规定它们与普通实数的一些运算规则如下：$\forall a\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$，

  a) $a+(+\infty)=(+\infty)+a=+\infty$；若 $a\neq+\infty$，则 $+\infty-a=+\infty$；但 $+\infty-(+\infty)$ 无意义．

  b) $0\times(+\infty)=(+\infty)\times 0=0$；若 $a\neq 0$，则 $a\times(+\infty)=(+\infty)\times a=+\infty$

- 定义中的性质b)一般称为可数可加性．因为要把可数个互不相交集合的测度加起来，那么就涉及到这样的求和运算如何定义，以及是否总有意义的问题．好在，我们在数学分析中学过，由正数构成的级数经过重排之后得到的级数之和与原级数之和相等（对此有疑问的读者可参看章后附录1.6），即，设 $(a_n\geq 0)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个正数数列，$\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是下标集合 $\mathbb{N}$ 到自身的一一映射，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同时散敛，并且当其中之一收敛时，两级数和相等，广义地讲，当它们发散时，由于正项级数只能发散到 $+\infty$，我们可以说它们相等，并且都等于 $+\infty$．这样就给我们的定义提供了一个坚实的理论基础：因为，如果 A 可以表示成可数个集合的不交并，那么总可以用自然数给这可数个集合进行编号，用它们的测度构成一个非负数列 $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$，不管编号的顺序如何，这个级数的和总是确定的．
- 一个半环当然不一定对集合的可数并封闭，因此在叙述性质b)时，为了讨论并集 $A=\bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$ 的测度就必须事先假定 $A\in\mathscr{S}$．但是，σ-环和 σ-域都是对可数并封闭的．所以如果 $\mathscr{S}$ 是 σ-环/域，那么只要所有的 A_n 都属于 $\mathscr{S}$，它们的并集 A 自然也属于 $\mathscr{S}$．

例 1.3.2. 设 $\mathscr{S}=\{\{x\}\,|\,x\in X\}\cup\{\emptyset\}$，定义在 $\mathscr{S}$ 上的集函数

$$\mu:A\mapsto\begin{cases}0 & A=\emptyset\\ 1 & A\neq\emptyset\end{cases}$$

为半环 $\mathscr{S}$ 上的测度．

例 1.3.3. 设 $\mathscr{S}=\{[a,b)\in\mathscr{P}(\mathbb{R})\,|\,a\leq b\}$，定义在 $\mathscr{S}$ 上的集函数 $\mu:[a,b)\mapsto b-a$ 是 $\mathscr{S}$ 上的测度．

例 1.3.4. 设 $\mathscr{S}=\{[x_1,y_1)\times[x_2,y_2)\times\cdots\times[x_n,y_n)\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)\,|\,x_i\leq y_i\}$，定义在 $\mathscr{S}$ 上的集函数

$$\mu:[x_1,y_1)\times[x_2,y_2)\times\cdots\times[x_n,y_n)\mapsto\prod_{i=1}^{n}(y_i-x_i)$$

是 $\mathscr{S}$ 上的测度.

例1.3.2中定义的测度称为计数测度，因为它等于集合中包括的元素个数，它很显然地符合测度的定义，因此具体的验证过程留给读者．例1.3.3定义的是一维空间中线段的长度，它在直觉上也很明显，但它的证明却比较冗长，我们把它放在附录1.6中；而例1.3.4定义的是矩形的面积，我们将在下一章利用积分的性质给出它的一个漂亮的证明．这里要指出的是，这两个例子在后续章节中分别被延拓成一维和二维的勒贝格测度．

正如前面反复提到的，一旦有了半环 $\mathscr{S}$ 上的测度，那么因为 $r(\mathscr{S})$ 中的集合都可以表示为 $\mathscr{S}$ 中有限个集合的不交并，我们马上就可以把半环的测度扩展到 $r(\mathscr{S})$ 上．为此，首先需要证明测度的有限可加性：

引理 1.3.5 (测度的有限可加性). 设 μ 是半环 $\mathscr{S}$ 上的测度，$(A_n \in \mathscr{S})_{n\in[[1,N]]}$ 是一列两两不交的集合，且 $\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n \in \mathscr{S}$，则

$$\mu(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

证明. 令 $A_{N+1} = A_{N+2} = \cdots = \emptyset$，则这可数个集合 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 仍然是两两不交的（任意两个集合的交集为空），根据测度的可数可加性，有

$$\mu(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n) = \mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

最后一个等号因为，对于所有的 $n > N$，$\mu(A_n) = \mu(\emptyset) = 0$. □

现在，就可以做测度的第一次扩展了.

定理 1.3.6. 设 μ 是半环 $\mathscr{S}$ 上的测度，那么在 $r(\mathscr{S})$ 上存在唯一的测度 $\tilde{\mu}$ 使得对任意 $A \in \mathscr{S}$ 都有 $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$.

证明. 根据 $r(\mathscr{S})$ 的构造性定义，对任意 $A \in r(\mathscr{S})$，存在 $\mathscr{S}$ 中有限个两两不交的集合 $(A_n)_{n\in[[1,N]]}$ 使得 $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n$. 那么定义

$$\tilde{\mu}(A) \triangleq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

首先证明 $\tilde{\mu}$ 的定义合理性，即如果同一个集合 A 还可以表示成 $\mathscr{S}$ 中的另外一些集合 $(B_m)_{m\in[[1,M]]}$ 的不交并：$A = \bigsqcup\limits_{m=1}^{M} B_m$，则 $\sum\limits_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \sum\limits_{m=1}^{M} \mu(B_m)$. 由于 $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n = \bigsqcup\limits_{m=1}^{M} B_m$，且每个 A_n, B_m 都属于 $\mathscr{S}$，根据半环的定义，有 $A_n \cap B_m \in \mathscr{S}$. 又因为对任意的 B_m，有 $B_m = B_m \cap A = B_m \cap (\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n) = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} (B_m \cap A_n)$，根据 μ 在 $\mathscr{S}$ 上的有限可加性，有 $\mu(B_m) = \sum\limits_{n=1}^{N} \mu(B_m \cap A_n)$，所以

$$\sum_{m=1}^{M} \mu(B_m) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_m \cap A_n) \tag{1.4}$$

同理可证

$$\sum_{n=1}^{N}\mu(A_n)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\mu(B_m\cap A_n) \tag{1.5}$$

式(1.4)和(1.5)的右侧相等，所以 $\sum\limits_{n=1}^{N}\mu(A_n)$ 与 $\sum\limits_{m=1}^{M}\mu(B_n)$ 都等于一个公共值，二者相等.

接下来证明 $\tilde{\mu}$ 是 $r(\mathscr{S})$ 上的测度. 显然，对于任意集合 $A\in r(\mathscr{S})$，$\tilde{\mu}(A)\geq 0$，且 $\tilde{\mu}(\emptyset)=0$，故只剩下可数可加性需要详细证明. 设 $A\in r(\mathscr{S})$，且 $(A_n\in r(\mathscr{S}))_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列两两不交的集合使得 $A=\bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$，由于 A 和每一个 A_n 都可以分解成 $\mathscr{S}$ 中有限个两两不交集合之并，故设 $A=\bigsqcup\limits_{m=1}^{M}B_m$，$A_n=\bigsqcup\limits_{n=1}^{N_n}C_{n,m}$，则

$$\mu(A)=\sum_{m=1}^{M}\mu(B_m),\quad \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=1}^{N_n}\mu(C_{n,m})$$

用自然数给这些 $C_{n,m}$ 重新分配下标，相当于将一个正项级数的每一项分拆成有限多项，得到的级数之和保持不变，因此我们可以写

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(C_n)$$

下面的事情就是证明 $\sum\limits_{m=1}^{M}\mu(B_m)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\mu(C_n)$，采用与 $\tilde{\mu}$ 定义合理性之证明相同的方法，有

$$\sum_{m=1}^{M}\mu(B_m)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_m\cap C_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\mu(B_m\cap C_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(C_n)$$

这样就证明了 $\tilde{\mu}$ 确实是 $r(\mathscr{S})$ 上的测度.

最后，显然对于所有的 $A\in\mathscr{S}$，$\tilde{\mu}(A)=\mu(A)$，因此 $\tilde{\mu}$ 是 μ 的延拓. 定理证毕. □

因为任意半环上的测度都可以扩展成环上的测度，所以以下针对环上的测度证明的性质也对半环上的测度有效.

命题 1.3.7 (测度的基本性质). 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的测度

a)（单调性）设 $(A,B)\in\mathscr{R}^2$，如果 $A\subset B$，则 $\mu(A)\leq\mu(B)$.

b)（次可数可加性）设 $(A_n\in\mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}$，$A\in\mathscr{R}$，如果 $A\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$，则

$$\mu(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

c)（次有限可加性）设 $(A_n\in\mathscr{R})_{n\in[[1,N]]}$，$A\in\mathscr{R}$，如果 $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{N}A_n$，则

$$\mu(A)\leq\sum_{n=1}^{N}\mu(A_n)$$

证明. a) 如果 $(A,B)\in\mathscr{R}^2$ 且 $A\subset B$，则根据环对集合差运算的封闭性，有 $B-A\in\mathscr{R}$，根据测度的有限可加性，有 $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)\geq\mu(A)$.

b) 设 $B_1=A_1, B_2=A_2-A_1, B_3=A_3-(A_2\cup A_1),\ldots,B_n=A_n-\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}A_i,\ldots$，则集合列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 两两不交，且 $\bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$. 再设 $C_n=B_n\cap A$，则由于 $A\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n$，有 $A=\bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}}C_n$. 此时，根据环的定义与性质，对任意的 $n\in\mathbb{N}$，有 $B_n\in\mathscr{R},C_n\in\mathscr{R}$，且 $C_n\subset B_n\subset A_n$. 根据测度的可数可加性及单调性，有

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(C_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

c) 令 $A_{N+1}=A_{N+2}=\cdots=\emptyset$，根据次可数可加性可得次有限可加性. □

1.4 从环到 σ-环的延拓

下面就进入本章的核心内容：讨论如何将一个环上的测度延拓到某个 σ-环. 假设我们能够把环 $\mathscr{R}$ 上的测度 μ 延拓到一个 σ-环 $r^*(\mathscr{R})$，那么对于所有 $r^*(\mathscr{R})$ 中的集合 A，如果在 $\mathscr{R}$ 中存在可数个集合 $(A_n\in\mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $A\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$，那么根据 $r^*(\mathscr{R})$ 上测度的次可数可加性，有 $\mu(A)\leq\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$. 为了更精确地估计 $\mu(A)$ 可能值的上界，我们先定义外测度：

定义 1.4.1 (外测度). 设 μ 是 X 的环 $\mathscr{R}$ 上的测度，如果 $A\in\mathscr{P}(X)$ 以及可数个集合 $(A_n\in\mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $A\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$，则称 (A_n) 是 A 的可数 $\mathscr{R}$-覆盖. 设

$$\mathscr{H}(\mathscr{R})=\left\{A\in\mathscr{P}(X)\,|\,\exists(A_n\in\mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}\text{ s.t. }A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right\}$$

对所有的 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$，定义

$$\mu^*(A)\triangleq\inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)\,|\,A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right\}$$

称 $\mu^*(A)$ 为 A 的外测度，称集合函数 $\mu^*:\mathscr{H}(\mathscr{R})\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 为 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上由 μ 引出的外测度.

命题 1.4.2. *$\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 为 σ-环，因此 $r_\sigma(\mathscr{R})\subset\mathscr{H}(\mathscr{R})$.*

证明. 容易验证 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 对集合的并、差、可数并等运算的封闭性，留给读者完成. □

命题 1.4.3 (外测度的性质). *设 $(A,B)\in\mathscr{H}(\mathscr{R})^2$，则*

a) 如果 $A\in\mathscr{R}$，则 $\mu^*(A)=\mu(A)$.

b) 如果 $A\subset B$，则 $\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$

c) 对 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 中的任意序列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$\mu^*(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n)\leq\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\mu^*(A_n)$.

证明. a) 如果 $A \in \mathscr{R}$，设 $A_1 = A, A_2 = A_3 = \cdots = \emptyset$，则 (A_n) 是 A 的可数 $\mathscr{R}$-覆盖，根据外测度的定义有 $\mu^*(A) \le \mu(A)$．另一方面，对任意覆盖 A 的可数个集合 $(A_n \in \mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}$，根据 μ 在 $\mathscr{R}$ 上的次可数可加性，有 $\mu(A) \le \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$，因此 $\mu(A) \le \mu^*(A)$．

b) 如果 $A \subset B$，则 B 的可数 $\mathscr{R}$-覆盖合也是 A 的可数 $\mathscr{R}$-覆盖，所以 $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$．

c) 如果在序列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中存在某个集合 A_n 使得 $\mu^*(A_n) = +\infty$，则性质c)显然成立．现在设所有的 A_n 外测度有限．由外测度的定义，任意正数 $\varepsilon > 0$，对每一个 A_n，都可以找到一个可数 $\mathscr{R}$-覆盖 $(B_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$，并且 $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}} \mu(B_{n,m}) < \mu^*(A_n) + \varepsilon/2^n$，则 $(B_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ 就是 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 的可数 $\mathscr{R}$-覆盖，根据外测度的定义，有

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \le \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \mu(B_{n,m}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$，则性质c)得证． □

外测度不只充当测度的最小上界，按照绪论中陈述的观点，接下来应该定义集合的内测度，并且对于内外测度相等的集合，它们的测度就会等于它们本身的外测度．但让我们先看两个外测度的例子，并且考察外测度离真正的测度相差多远．

例 1.4.4. 考虑将例*1.3.2*中定义的测度 μ 先延拓至环 $r(\mathscr{S})$，则 $r(\mathscr{S})$ 表示 X 的所有有限子集构成的环，而延拓后的测度正好表示集合中的元素个数；再考虑这个测度的外测度，则 $\mathscr{H}(r(\mathscr{S}))$ 表示 X 的所有至多可数子集构成的 σ-环，而一个集合的外测度广义地讲仍然表示集合中的元素个数：当集合是可数无穷集时，外测度等于 $+\infty$．容易验证，这个外测度恰好是 σ-环 $\mathscr{H}(r(\mathscr{S}))$ 上的测度．

例 1.4.5. 设 $\mathscr{R} = \{\emptyset, [0,1]\}$，则 $\mathscr{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的环，定义 $\mu(\emptyset) = 0, \mu([0,1]) = 1$，则 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度．同时，$\mathscr{H}(\mathscr{R}) = \mathscr{P}([0,1])$，并且 $\forall A \in \mathscr{H}(\mathscr{R}) \setminus \{\emptyset\}, \mu^*(A) = 1$．显然，$\mu^*$ 不满足可加性，因此不是测度．

从以上两个例子看出，因为我们把环 $\mathscr{R}$ 中的元素当做尺子去丈量 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 中的元素，从而得出一个粗略的“准测度”μ^*，所以 μ^* 性质的好坏取决于尺子的粗细，尺子越细，得到的 μ^* 越接近测度，当尺子太粗时，μ^* 可能与真正的测度相差很远．以上两个例子是极端例子，在更多的情况下，$\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 中有一部分集合可以用 μ^* 定义测度，另一部分则不能．因此，接下来的工作就是把可以用 μ^* 定义测度的那些集合挑选出来，我们称这些集合是 μ^*-可测集，简称可测集．

所以，我们试着定义 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的内测度．鉴于勒贝格对有界集合内测度的定义方式，对于 $A \in \mathscr{H}(\mathscr{R})$，必须在 $\mathscr{R}$ 中找到一个集合 R 使得 $A \subset R$ 且 $\mu(R) < +\infty$，然后定义 A 的内测度为 $\mu_*(A) = \mu(R) - \mu^*(R - A)$．如果不能在 $\mathscr{R}$ 中找到包含 A 的集合，或者所有包含 A 的集合都没有有限的测度，都将使内测度的定义陷入困境．

我们对勒贝格的内测度定义方法做两点改造就可以化解掉这样的困难．第一，注意到对于测度有限的 R，A 的内外测度相等 $\mu_*(A) = \mu(R) - \mu^*(R - A) = \mu^*(A)$ 等价于

$\mu^*(A)+\mu^*(R-A)=\mu(R)$，而这个式子正好表示 A 与 $R-A$ 的外测度有可加性，这正是我们对测度的基本要求．而且，改造后的式子对 $\mu(R)=+\infty$ 的情况也总是有意义的（并且总是成立的，因为外测度有次可加性）．另外还有一个附加的好处，就是我们发现内测度的概念完全没有必要了．

第二，对 $\mathbb{R}^n$ 中无界集的考察使我们想到，$\mathbb{R}^n$ 中的一个无界集 A 可以用可数多个测度有限的矩形 $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 覆盖（如图1.1），我们可以通过条件 $\mu(R_n)=\mu^*(R_n\cap A)+\mu^*(R_n-A)$

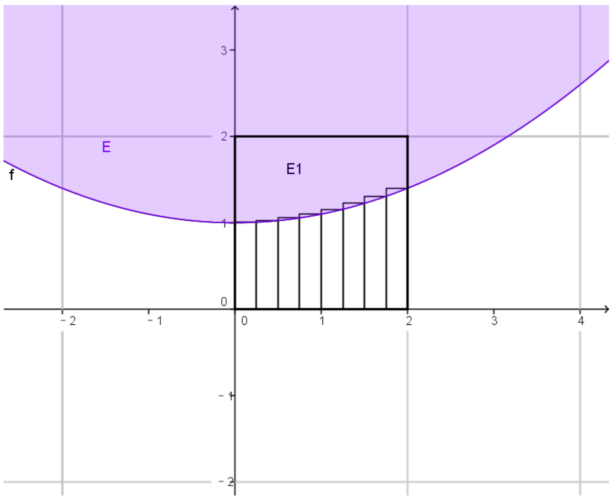


图 1.1: 无界集可测性的判定

判断每个 $R_n\cap A$ 的可测性，A 是可测的当且仅当所有的 $R_n\cap A$ 都是可测的．对于一般情况，因为 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 中的集合都有可数 $\mathscr{R}$-覆盖，所以，我们有条件进行第二点改造：用 $\mathscr{R}$ 中所有的集合代替特定的 R，通过检验条件 $\forall R\in\mathscr{R},\mu(R)=\mu^*(R\cap A)+\mu^*(R-A)$ 来检验 A 的可测性．

定义 1.4.6 (μ^*-可测集). 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的测度，μ^* 是它在 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上诱导的外测度，称 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 为 μ^*-可测集，当且仅当

$$\forall R\in\mathscr{R},\mu(R)=\mu^*(R\cap A)+\mu^*(R-A)$$

所有 μ^*-可测集构成的集合记为 $r^*(\mathscr{R})$.

命题 1.4.7. $A\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 为 μ^*-可测集，当且仅当对任何具有有限测度的 $R\in\mathscr{R}$，有 $\mu(R)\geq\mu^*(R\cap A)+\mu^*(R-A)$.

证明. 必要性显然，充分性由外测度的次可加性

$$\mu(R)\leq\mu^*(R\cap A)+\mu^*(R-A)$$

得到，另外注意当 $\mu(R)=+\infty$ 时，不等式 $\mu(R)\geq\mu^*(R\cap A)+\mu^*(R-A)$ 自然成立． $\square$

定理 1.4.8 (Caratheodory 条件[1]). $A \in \mathscr{H}(\mathscr{R})$ 为 μ^*-可测集当且仅当 A 满足如下的 ***Caratheodory*** **条件:**

$$\forall E \in \mathscr{H}(\mathscr{R}), \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E - A)$$

证明. 由于 $\mathscr{R} \subset \mathscr{H}(\mathscr{R})$，充分性显然. 下面证必要性，设 $A \in \mathscr{H}(\mathscr{R})$ 为 μ^*-可测集，即 $\forall R \in \mathscr{R}, \mu(R) = \mu^*(R \cap A) + \mu^*(R - A)$，则对于 $E \in \mathscr{H}(\mathscr{R})$，基于命题1.4.7证明中陈述的理由，只需证明当 $\mu^*(E) < +\infty$ 时有不等式 $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E - A)$. 当 $\mu^*(E) < +\infty$ 时，由外测度的定义，$\forall \varepsilon > 0, \exists (R_n \in \mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ 且 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(R_n) < \mu^*(E) + \varepsilon$. 但对于每一个 R_n，由假设条件有 $\mu(R_n) = \mu^*(R_n \cap A) + \mu^*(R_n - A)$，故

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(R_n \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(R_n - A) < \mu^*(E) + \varepsilon$$

又因为 $E \cap A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (R_n \cap A), E - A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (R_n - A)$，因此由外测度的次可数可加性，有 $\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(R_n \cap A), \mu^*(E - A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(R_n - A)$，因此

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E - A) < \mu^*(E) + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$ 就得到了想要的不等式，定理得证. □

定理 1.4.9. *设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的测度，则 μ^*-可测集类 $r^*(\mathscr{R})$ 是包含 $\mathscr{R}$ 的 σ-环，μ^* 是 $r^*(\mathscr{R})$ 上的测度. 并且由于对所有 $R \in \mathscr{R}, \mu^*(R) = \mu(R)$，所以 μ^* 是 μ 在 σ-环 $r^*(\mathscr{R})$ 上的延拓.*

证明. 首先证明 $r^*(\mathscr{R})$ 对集合的差运算封闭. 设 $(A, B) \in r^*(\mathscr{R})$，欲证 $A - B \in r^*(\mathscr{R})$，由 Caratheodory 条件及命题1.4.7，即证明对所有测度有限的 $E \in \mathscr{H}(\mathscr{R})$ 有不等式 $\mu(E) \geq \mu^*(E \cap (A - B)) + \mu^*(E - (A - B))$. 由于 $(A, B) \in r^*(\mathscr{R})$，依次应用 Caratheodory 条件，有 $\mu(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E - A), \mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A - B)$，所以有

$$\mu(E) = \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A - B) + \mu^*(E - A)$$

用 B^c 表示 B 的余集，则 $E \cap A - B = E \cap A \cap B^c = E \cap (A \cap B^c) = E \cap (A - B)$. 对于另外两个集合 $E \cap A \cap B$ 与 $E - A$，读者若画出文氏图便可看到，二者之并正好是 $E - (A - B)$. 当然，我们只需证明 $(E \cap A \cap B) \cup (E - A) \supset E - (A - B)$ 就可证明 $\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E - A) \geq \mu^*(E - (A - B))$，于是证得想要的不等式. 实际上包含关系 $(E \cap A \cap B) \cup (E - A) \supset E - (A - B)$ 是成立的，因为 $x \in E - (A - B)$ 等价于 $x \in E$ 且 $x \notin A - B$，这又等价于 $x \in E$ 且 $(x \notin A$ 或 $x \in A \cap B)$，等价于 $x \in E - A$ 或 $x \in E \cap A \cap B$.

为了证明 $r^*(\mathscr{R})$ 是 σ-环，只需再证它对可数并封闭. 设 $(A_n \in r^*(\mathscr{R}))_{n\in\mathbb{N}}$，令 $B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, B_3 = A_3 - A_2 - A_1, \ldots, B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i, \ldots$，则由于 $r^*(\mathscr{R})$ 对集合的差封

[1]由于这条定理陈述的等价性，在一般的书中都是直接用 Caratheodory 条件定义 μ^* 可测集，但是 Caratheodory 条件的来源却不容易讲清楚. 本书为了使定义更自然，采用这样的处理方式. 这是受文献 [6] 第 60 页的引理启发.

闭，因此 $B_n \in r^*(\mathscr{R})$，且 (B_n) 两两不交，$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. 因此只需证明 $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in r^*(\mathscr{R})$. 设 $E \in \mathscr{H}(\mathscr{R})$，应用有限次 Caratheodory 条件，并注意 $B_i \cap B_j = \emptyset$ 时，有 $(E-B_i)\cap B_j = E\cap B_j$，因此

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E-B_1) + \mu^*(E\cap B_1)\\ &= \mu^*(E-B_1-B_2) + \mu^*(E\cap B_2) + \mu^*(E\cap B_1)\\ &= \dots\\ &= \mu^*(E-\bigsqcup_{n=1}^{N} B_n) + \sum_{n=1}^{N}\mu^*(E\cap B_n)\end{aligned}$$

由于 $E-\bigsqcup_{n=1}^{N} B_n \supset E-\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$，故 $\mu^*(E-\bigsqcup_{n=1}^{N} B_n) \geq \mu^*(E-\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n)$，所以有

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E-\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n) + \sum_{n=1}^{N}\mu^*(E\cap B_n)$$

再令 $N\to\infty$，有

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E-\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E\cap B_n) \tag{1.6}$$

用 μ^* 的次可加性，有

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E-\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n) + \mu^*(E\cap\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

这样就证明了 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in r^*(\mathscr{R})$，从而 $r^*(\mathscr{R})$ 是 σ-环.

最后，在不等式(1.6)中取 $E = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in r^*(\mathscr{R})$，得到

$$\mu^*(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(B_n)$$

再由次可加性得到 μ^* 在 $r^*(\mathscr{R})$ 上的可数可加性. 因此，μ^* 为 $r^*(\mathscr{R})$ 上的测度. □

我们已经把环 $\mathscr{R}$ 上的测度延拓到了更大的 σ-环 $r^*(\mathscr{R})$ 上，那么由于 $r_\sigma(\mathscr{R})$ 是包含 $\mathscr{R}$ 的最小 σ-环，所以 $r_\sigma(\mathscr{R}) \subset r^*(\mathscr{R})$，也就是说，$r_\sigma(\mathscr{R})$ 中的集合都可测. 更进一步，如果再把 $r^*(\mathscr{R})$ 中的集合当做"尺子"去丈量新的集合，我们的测度是否还能够继续延拓呢？以下定理表明，用外测度的方法只能延拓一次就不能再延拓了，因为，所有的 μ^*-可测集都是由 $\mathscr{R}$ 中的集合丈量出来的，再用这些 μ^*-可测集去丈量新的集合，相当于重复利用 $\mathscr{R}$ 中的"尺子"，得不到新的可测集了.

命题 1.4.10. 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的测度，μ^* 是它在 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上诱导的外测度，$r^*(\mathscr{R})$ 是 μ^*-可测集构成的集类，则 $\mu^{**} = \mu^*, r^*(r^*(\mathscr{R})) = r^*(\mathscr{R})$.

证明. 首先，显然 $\mathscr{H}(r^*(\mathscr{R})) = \mathscr{H}(\mathscr{R})$，因为如果 $A \in \mathscr{P}(X)$ 有可数 $r^*(\mathscr{R})$-覆盖，而这个可数 $r^*(\mathscr{R})$-覆盖的每一个集合都有可数 $\mathscr{R}$-覆盖，那么 A 便有可数 $\mathscr{R}$-覆盖.

其次，对任意的 $A \in \mathscr{H}(r^*(\mathscr{R}))$，一方面有

$$\left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \,|\, \forall n, A_n \in \mathscr{R}\right\} \subset \left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \,|\, \forall n, A_n \in r^*(\mathscr{R})\right\}$$

所以有 $\mu^{**}(A) \le \mu^*(A)$；另一方面，对 A 的任意可数 $r^*(\mathscr{R})$-覆盖 $(A_n \in r^*(\mathscr{R}))_{n\in\mathbb{N}}$，根据外测度的单调性与次可加性，有 $\mu^*(A) \le \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$，因此 $\mu^*(A) \le \mu^{**}(A)$. 综上，$\mu^{**}(A) = \mu^*(A)$.

由以上两点可知，既然外测度的定义域和值都没有改变，那么可测集类也不会不同，因此 $r^*(r^*(\mathscr{R})) = r^*(\mathscr{R})$. □

本节最后，我们来讨论测度延拓的唯一性. 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的测度，μ^* 是 $r^*(\mathscr{R})$ 上由 μ 延拓出的测度，现在的问题是，这样的延拓是否唯一？即对于一个给定的 $E \in r^*(\mathscr{R})$，是否可以以另一种不同的方式把 μ 延拓到另一个环 $\mathscr{R}' \ni E$，使得 E 在 $\mathscr{R}'$ 中的测度不同于 μ^*？由内外测度的思想，如果可以在 $\mathscr{R}$ 中找到可数多个测度有限且两两不交的集合 R_n 覆盖集合 E，则对 E 的每个组成部分 $E \cap R_n$，我们所能赋给它的测度最大是 $\mu^*(E \cap R_n)$，最小是 $\mu_*(E \cap R_n) = \mu(R_n) - \mu^*(R_n - E)$，但由 $E \in r^*(\mathscr{R})$ 知这两个值相等，所以每个集合 $E \cap R_n$ 的测度是由 $\mathscr{R}$ 上的测度 μ 唯一确定的，再由测度的可数可加性，E 的测度也由 μ 唯一确定.

定义 1.4.11 (σ-有限测度). 设 μ 为环 $\mathscr{R}$ 上的测度，$A \in \mathscr{R}$，如果存在 A 的可数 $\mathscr{R}$-覆盖 $(A_n \in \mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\mu(A_n) < +\infty$，则称 A 的测度是 σ-有限的. 如果 $\mathscr{R}$ 中所有的集合都有 σ-有限的测度，则称 μ 在 $\mathscr{R}$ 上是 σ-有限的.

定理 1.4.12 (测度延拓的唯一性定理). *设 μ 为环 $\mathscr{R}$ 上的 σ-有限测度，μ^* 为 $r^*(\mathscr{R})$ 上由 μ 按外测度方式延拓出来的测度. 如果有另一个环 $\mathscr{R}' \supset \mathscr{R}$ 及其上的测度 μ'，且对于所有 $R \in \mathscr{R}$，有 $\mu'(R) = \mu(R)$，则对于所有 $A \in r^*(\mathscr{R}) \cap \mathscr{R}'$，有 $\mu'(A) = \mu(A)$.*

证明. 首先，按照外测度的定义，以及测度 μ' 的次可数可加性，对任意集合 $A \in r^*(\mathscr{R}) \cap \mathscr{R}'$，都有

$$\mu'(A) \le \mu^*(A)$$

另一方面，A 可以用 $\mathscr{R}$ 中可数个集合覆盖，而 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的 σ-有限测度，所以覆盖 A 的每一个集合又可以用 $\mathscr{R}$ 中可数个测度有限的集合覆盖，因此 A 可以用 $\mathscr{R}$ 中可数个测度有限的集合覆盖，即存在 $(R_n \in \mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} R_n$ 且 $\mu(R_n) < +\infty$. 不妨假定 $(R_n \in \mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}$ 两两不交，否则设 $R_1' = R_1, R_2' = R_2 - R_1, \ldots$ 并用 $(R_n' \in \mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}$ 代替 $(R_n \in \mathscr{R})_{n\in\mathbb{N}}$.

由于 $A \in r^*(\mathscr{R}) \cap \mathscr{R}', R_n \in \mathscr{R} \subset r^*(\mathscr{R}) \cap \mathscr{R}'$，知 $R_n \cap A, R_n - A$ 也是 $r^*(\mathscr{R}) \cap \mathscr{R}'$ 中的元素，所以，根据测度的可加性及定理条件，有如下等式：

$$\mu'(R_n \cap A) + \mu'(R_n - A) = \mu'(R_n) = \mu(R_n) = \mu^*(R_n \cap A) + \mu^*(R_n - A)$$

但由于 $\mu'(R_n\cap A)\le\mu^*(R_n\cap A),\mu'(R_n-A)\le\mu^*(R_n-A)$，且 $\mu(R_n)<+\infty$，所以要想有上述等式，只能有

$$\mu'(R_n\cap A)=\mu^*(R_n\cap A),\mu'(R_n-A)=\mu^*(R_n-A)$$

因此，有

$$\mu'(A)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu'(R_n\cap A)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu^*(R_n\cap A)=\mu^*(A) \qquad \square$$

注. 参考文献 [3] 中的反例 2.2.1 及反例 2.2.2 表明，延拓之后的测度是 σ-有限测度不能保证原测度也是 σ-有限的. 对于 $\mathscr{R}$ 上的非 σ-有限测度，延拓的唯一性定理是不成立的.

1.5 测度与集合的极限

在本章第1.1节引入了集合的极限的概念，它在一定程度上反映了一列集合的变化趋势，而一列集合的测度作为一个数列也存在极限的概念，那么这两个极限之间有何联系？本节就来探讨这个问题. 由于任何环上的测度都可以扩展到一个 σ-环，所以我们只针对 σ-环讨论.

定理 1.5.1. 设 μ 是 σ-环 $\mathscr{R}^*$ 上的测度，$(A_n\in\mathscr{R}^*)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathscr{R}^*$ 中的一列集合，则

a) 如果 (A_n) 单调递增，即 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\ldots$，则 $\mu(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

b) 如果 (A_n) 单调递减，即 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\ldots$，且 $\exists N\in\mathbb{N}$ 使得 $\mu(A_N)<+\infty$，则 $\mu(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

c) 对于一般的集合列，有 $\mu(\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n)\le\varliminf\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

d) 如果 $\exists N\in\mathbb{N}$ 使得 $\mu(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}A_n)<+\infty$，那么 $\mu(\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n)\ge\varlimsup\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

e) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在，且 $\exists N\in\mathbb{N}$ 使得 $\mu(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}A_n)<+\infty$，则 $\mu(\lim\limits_{n\to\infty}A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

证明. 由于 σ-环对可数个集合的交、并运算封闭，可知它对这里所有的极限运算封闭.

a) 如果 (A_n) 单调递增，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$. 设 $B_1=A_1,B_2=A_2-A_1,\ldots,B_n=A_n-A_{n-1},\ldots$，则 (B_n) 两两不交，且 $\bigsqcup\limits_{n=1}^{N}B_n=A_n,\bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$. 因此

$$\mu(\lim_{n\to\infty}A_n)=\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}B_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mu(B_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

b) 根据定理条件，设 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\mu(A_N)<+\infty$，由于 (A_n) 单调递减，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}A_n=A_N-\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}(A_N-A_n)$ 且 $(A_N-A_n)_{n\le N}$ 单调递增，因此应用a)，有

$$\begin{aligned}\mu(\lim_{n\to\infty}A_n)&=\mu(A_N-\bigcup_{n=N}^{\infty}(A_N-A_n))=\mu(A_N)-\mu(\bigcup_{n=N}^{\infty}(A_N-A_n))\\&=\mu(A_N)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_N-A_n)=\mu(A_N)-\mu(A_N)+\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\end{aligned}$$

c) 由下极限的定义，有 $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$，而序列 $(\bigcap_{k\geq n} A_k)_n \in \mathbb{N}$ 单调递增，所以

$$\mu(\varliminf_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{k\geq n} A_k) = \varliminf_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{k\geq n} A_k) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

其中，最后的 $\leq$ 应用了测度的单调性以及下极限的保序性.

d) 由上极限的定义，有 $\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$，而序列 $(\bigcup_{k\geq n} A_k)_{n\in\mathbb{N}}$ 单调递减，由条件假设及b)，有

$$\mu(\varlimsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k\geq n} A_k) = \varlimsup_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{k\geq n} A_k) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

e) 根据前面几条性质可知，在本条假设下，有

$$\mu(\varliminf_{n\to\infty} A_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\varlimsup_{n\to\infty} A_n)$$

但由于 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在，有 $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n$，即上式中首尾两项相等，导致所有的不等号都变为等号，所有的上下极限变为极限，因此

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$ □

思考题 1.5.1. *在定理1.5.1的陈述中，性质b)和性质d)中限制集合测度有限的条件都不能去掉，试分别举出反例证明这一点.*

思考题 1.5.2. *设 μ 是 $\mathbb{R}^2$ 的某个 σ-环 $\mathscr{R}^*$ 上的测度，设 $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列非负实函数，并且对每一个 $x \in \mathbb{R}$，$(f_n(x))$ 为递增有界数列，并且每个 f_n 的下方图形 D_{f_n}（参见15页思考题1.1.5中的定义）都属于 $\mathscr{R}^*$，设 f 为 f_n 的极限函数，证明 $D_f \in \mathscr{R}^*$，并且 $\mu(D_f) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_{f_n})$.*

附录 1.A 关于可数个正数之和的讨论，以及例1.3.3的证明

到目前为止我们还没有得出任何有关勒贝格测度的结果，因为最简单的勒贝格测度：一维空间 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度是由例1.3.3中定义的测度通过外测度的方式扩展出来的，但这个例子还没有被证明，在这个附录中，我们就来补充这个证明. 先把它重新叙述在这里：

> **例 1.3.3.** 设 $\mathscr{S} = \{[a,b) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid a \leq b\}$，定义在 $\mathscr{S}$ 上的集函数 $\mu : [a,b) \mapsto b-a$ 是 $\mathscr{S}$ 上的测度.

只要可以证明例1.3.3，按照前面几节讲述的内容，我们先将 μ 延拓至环 $r(\mathscr{S})$，再延拓至 σ-环 $r^*(r(\mathscr{S}))$，这样就得到了勒贝格测度. 由于 $\mathbb{R}$ 上的 Borel-域 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是由 $\mathscr{S}$ 生成的 σ-环，所以 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset r^*(r(\mathscr{S}))$，也就是说，所有的 Borel 集都在勒贝格测度的定义域中，都是勒贝格可测集.

为了证明例1.3.3，只需证明

a) $\forall A \in \mathscr{S}, \mu(A) \geq 0$;

b) $\mu(\emptyset) = 0$

c) 如果 $A \in \mathscr{S}$，且存在 $\mathscr{S}$ 中的集合序列 $(A_n \in \mathscr{S})_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $A = \bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$，则

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

前两条是显然的，主要的问题来自于第三条，即证明 μ 在 $\mathscr{S}$ 上有可数可加性，具体地说，就是如果可数个左开右闭区间 $A_n = [a_n, b_n)$ 互不重叠，且可以合并成一个左开右闭区间 $[a, b)$，那么它们的长度之和就等于整个区间的长度.

有的读者肯定会说：这是显然的，为什么还需要证明呢？首先，之所以说它显然，是因为我们的头脑中早已有了测度的观念，这种测度的观念来源于生活中对常见图形的观察，但我们要证明的就是一个关于测度的基本命题，我们不能通过已有的测度观念证明测度本身；其次，这个命题是否显然，还是要从它涉及到的概念的基本定义出发，比如，什么是区间 $[a, b)$？它是满足 $a \leq x < b$ 的实数 x 构成的集合，那么长度 $b - a$ 是怎样跟这个集合发生联系的？集合的并又怎样和长度的和联系起来的？无穷多个数无论怎么加最后结果都一样吗？在思考这些问题的过程中，实数集的几何形象有时会给我们带来直观的帮助，但有时又会带来干扰，我们必须仔细地辨析清楚哪些论证是有逻辑基础的，哪些论证只是来自直观形象. 我们必须特别清楚，实数的原始定义是不依赖于几何形象的，它是从有理数集通过柯西序列方式或戴德金分割方式构造出来的一个具有一定代数与拓扑结构的集合，稍微具体一些，实数集 $\mathbb{R}$ 是一个满足如下条件的集合：

a) $\mathbb{R}$ 上有两种运算：“$+$”与“$\times$”，使得 $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$，都有

- $a + (b + c) = (a + b) + c, a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$;
- $a + b = b + a, a \times b = b \times a$;
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;
- $\mathbb{R}$ 中有一个元素 0 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$ 都有 $x + 0 = 0 + x = x$，并且 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ 使得 $x + y = y + x = 0$;
- $\mathbb{R}$ 中有一个元素 $1 \neq 0$ 使得 $\forall x \in \mathbb{R}$ 都有 $x \times 1 = 1 \times x = x$，并且 $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \exists y \in \mathbb{R}$ 使得 $x \times y = y \times x = 1$;

b) $\mathbb{R}$ 上有一种全序关系 $\leq$，使得 $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$，都有

- $a \leq b$ 或 $b \leq a$;
- 若 $a \leq b, b \leq c$ 则 $a \leq c$;
- 若 $a \leq b$ 且 $b \leq a$ 则 $a = b$;
- 若 $a \leq b$ 则 $a + c \leq b + c$;
- 若 $0 \leq a, 0 \leq b$ 则 $0 \leq a \times b$

c) 集合 $\mathbb{R}$ 满足戴德金完备性，$\mathbb{R}$ 的所有有上界的非空子集必有上确界。

把刚才的那些问题放在这个公理化体系中考察，就没有那么显然了，比如，可数个正数的和，就是一个没有经过完整讨论的概念.

如果是有限个实数，因为加法的交换律和结合律，我们可以随意加和而不需要考虑加和的顺序，比如 $3+2+5+4=5+3+4+2$ 等等．有了实数列极限的概念，我们可以定义实数列 (a_n) 构成的级数的和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$，在某种程度上我们可以认为这样的级数和就是无穷多个数加起来的和，但是无穷多个数的加法却不满足交换律，因为一个收敛但不绝对收敛的级数通过调换项的顺序可以等于任何实数或无穷大．但是，在定义测度的可数可加性的时候，因为可数个集合的并集与它们的顺序无关，所以要求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ 也与顺序无关，否则将使 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 的测度变得不确定．好在，我们目前讨论的测度都是非负实数或 $+\infty$，而对于正项级数，数学分析中早有如下的定理 [4]：

> 将级数 $\sum u_n$ 的所有项按另一个次序重新排列，可以得到一个新的级数 $\sum v_n$，称之为级数 $\sum u_n$ 的重排级数．
>
> **定理．** *若级数 $\sum u_n$ 绝对收敛，则它的任何重排级数 $\sum v_n$ 都绝对收敛，并且二者的和数相同．*
>
> 证明．(i) 设 $\sum u_n$ 为正项级数．将 $\sum u_n$ 和它的重排级数 $\sum v_n$ 的部分和分别记为 U_n 和 V_n．对任意 $n\in\mathbb{N}$，由于 $\sum v_n$ 是 $\sum u_n$ 的重排，设 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 在 $\sum u_n$ 中的最大下标是 N_n，于是有
>
> $$V_n \le U_{N_n}, n = 1, 2, \dots.$$
>
> 令 $n\to\infty$ 取极限，即得
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \lim_{n\to\infty} V_n \le \lim_{n\to\infty} U_{N_n} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$
>
> 反之，$\sum u_n$ 也是 $\sum v_n$ 的重排级数，故可类似地得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，从而得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.
>
> ...

其中，一个级数 $\sum u_n$ 绝对收敛就是指它的绝对值级数 $\sum |u_n|$ 收敛，对于正项级数，绝对收敛等价于收敛．由于我们这里只需要讨论正项级数，所以定理证明的第二部分省略，摘抄的这部分论证可以说明，对于正项级数 $\sum u_n$，如果它收敛，则它的任何重排级数也收敛，并且级数和不变；如果它发散，则意味着 $\sum u_n = +\infty$，那么它的任何重排级数都发散，并且等于 $+\infty$．也就是说，不管正项级数 $\sum u_n$ 是有限还是无限，我们总可以把它的项任意地重排，只要保证在重排的过程中不添项或漏项即可．正数级数还有类似于结合律的特点，就是把相邻几个项合并在一起，得到的级数与原级数也相等，因为正项级数部分和是单调递增序列，几项合在一起的部分和数列相当于原数列的子列，与原数列同时散敛且有相同的极限．

这样，对于一个可数集合 Λ 以及可数个非负数 $\{a_\lambda \geq 0 \,|\, \lambda \in \Lambda\}$，根据可数性的定义，可以在自然数集与 Λ 之间建立一一对应 $\varphi : \mathbb{N} \to \Lambda$，那么可以这样定义可数个正数的和：

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}.$$

不论 φ 如何取，因为有了数学分析中的定理，上述定义总是良好的.

但是要清楚这里的逻辑，上述的重排级数仍然是一个级数，而没有被拆成两个或更多的级数，比如，这个定理中不包括以下情形：把一个级数的所有奇数项和偶数项分别加起来，得到的两个级数和再相加，这样的操作就不是我们刚刚所讲的重排．那么这样的操作是否会改变运算的结果？还是有待论证的.

考虑下面这个由可数个小区间构成一个大区间的情形：设 $x_n = 1 - \frac{1}{n}, x_{n,m} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}(1 - \frac{1}{m})$，$x_n$ 把 $[0,1)$ 分成无穷多个小区间 $[1-1/n, 1-1/(n+1))$，每个这样的小区间又被 $x_{n,m}$ 分成可数多个小区间，则所有形如 $[x_{n,m}, x_{n,m+1})$ 的区间之并构成了 $[0,1)$，因为 $\bigcup\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} [x_{n,m}, x_{n,m+1}) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} [x_{n,m}, x_{n,m+1}) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}) = [0,1)$．我们很容易确认 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}(x_{n,m+1} - x_{n,m}) = 1$，但是，因为我们把可数个非负实数之和定义成一个级数的和，那么我们考虑这可数个区间长度之和的时候就不得不打乱它们在数轴上的顺序，我们只能在 $[0,1/2)$ 上取有限个，在 $[1/2,1/3)$ 上取有限个，等等，任何有限项都不可能完整地加出像 $[0,1/2)$ 的一个区间．这样的级数加和的结果是否可以保证一定等于区间总长度 1，即对任何可数个正数 $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ 是否总有

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} \tag{1.7}$$

也是有待论证的．更何况，可能的情况比这个例子要复杂得多，可能需要无穷个求和号叠加在一起，即使是直观的形象也不能提供显然的证据.

下面针对正项级数证明(1.7)式，然后证明区间长度的可数可加性.

命题 1.6.1. 设 $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ 是可数个正数，则(1.7)式成立.

证明. 设 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ 是一一映射，并记 $\varphi(n) = (\varphi_1(n), \varphi_2(n))$，则根据定义，有

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} u_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\varphi(n)}$$

一方面，对于任意的 $K \in \mathbb{N}$，考虑 $N = \max\limits_{1\leq n\leq K}\{\varphi_1(n)\}, M = \max\limits_{1\leq n\leq K}\{\varphi_2(n)\}$，则

$$\sum_{n=1}^{K} u_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} u_{n,m} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}$$

令 $K \to \infty$，则有不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}$$

另一方面，对任意 $N\in\mathbb{N}$，根据极限的性质有

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}u_{n,m}=\sum_{n=1}^{N}\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}u_{n,m}=\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}u_{n,m}=\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}u_{n,m}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}u_{n,m}$$

而级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}u_{n,m}$ 可以看做级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{\varphi(n)}$ 的子级数的重排，因此

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}u_{n,m}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}u_{n,m}\le\sum_{n=1}^{\infty}u_{\varphi(n)}$$

令 $N\to\infty$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{n,m}\le\sum_{n=1}^{\infty}u_{\varphi(n)}$$

综上所述，我们证明了等式(1.7). □

注. 命题1.6.1蕴含了，对于正项级数来讲，两个求和号可交换顺序，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{n,m}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{n,m}$$

同时也蕴含了，对于可数指标集 Λ 以及可数个正数 $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，如果把 Λ 分解成可数个不相交子集的并：$\Lambda=\Lambda_1\sqcup\Lambda_2\sqcup\ldots$，则

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}u_\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda\in\Lambda_n}u_\lambda$$

引理 1.6.2. *设 Λ 是可数集合，$\{[a_\lambda,b_\lambda)\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 是一族互不相交的非空区间，且 $\bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda}[a_\lambda,b_\lambda)=[a,b)$，那么*

a) 它们的左端点 a_λ 互不相等；

b) 集合 $\{a_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$ 的任何非空子集都包含最小元素；

c) 对任意一个 $a_\lambda\ne a$，或者存在唯一的 $\lambda'\in\Lambda$ 使得 $b_{\lambda'}=a_\lambda$，或者存在一列严格单调递增的 a_{λ_n} 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{\lambda_n}=a_\lambda$.

证明. a) 如果 $a_\lambda=a_{\lambda'}$，则由于 $[a_\lambda,b_\lambda)\ne\emptyset,[a_{\lambda'},b_{\lambda'})\ne\emptyset$，知 $b_\lambda>a_\lambda,b_{\lambda'}>a_{\lambda'}$，因此 $[a_\lambda,b_\lambda)\cap[a_{\lambda'},b_{\lambda'})=[a_\lambda,\min(b_\lambda,b_{\lambda'}))\ne\emptyset$，与假设矛盾.

b) 设 $\emptyset\ne A\subset\{a_\lambda\,|\,\lambda\in\Lambda\}$，则因为 A 有下界 a，所以 A 有下确界，设为 γ，显然 $\gamma\in[a,b)$，故 $\exists\lambda'\in\Lambda$ 使得 $\gamma\in[a_{\lambda'},b_{\lambda'})$，因此 $\forall a_\lambda\in A$，都有 $a_\lambda\ge\gamma\ge a_{\lambda'}$，所以如果 $a_{\lambda'}\notin A$，则 $a_\lambda>a_{\lambda'}$，那么由于 $[a_\lambda,b_\lambda)\cap[a_{\lambda'},b_{\lambda'})=\emptyset$，有 $a_\lambda\ge b_{\lambda'}$，即 $b_{\lambda'}$ 是 A 的下界，与 $\gamma<b_{\lambda'}$ 是下确界矛盾. 所以首先知道 $a_{\lambda'}\in A$，其次知道 $\gamma=a_{\lambda'}$，并且 $a_{\lambda'}$ 是 A 中的最小元.

c) 对任意一个 $a_\lambda\ne a$，设 $B=\{a_\mu\,|\,a_\mu<a_\lambda\}$，则因为 $a\in B$，所以 $B\ne\emptyset$. 当 a_λ 是 B 的上确界时，由于 $a_\lambda\notin B$，在 B 中可找到一列单调递增序列 a_{λ_n} 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{\lambda_n}=a_\lambda$；反之，存在正数 δ 使得 $\forall a_\mu\in B,a_\mu\le a_\lambda-\delta$. 那么存在 $\lambda'\in\Lambda$ 使得 $a_\lambda-\delta\in[a_{\lambda'},b_{\lambda'})$，这时就有 $b_{\lambda'}=a_\lambda$，并且因为各个区间无交集，λ' 是唯一的. □

注. 引理1.6.2中的b)所展示出的性质称作集合的良序性，如果一个集合 A 以及 A 上的全序关系 $\leq$ 满足：任何 A 的非空子集都含有最小元素，则称 A 是良序集. 比如，自然数集 $\mathbb{N}$ 就是良序集，而整数集 $\mathbb{Z}$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 都不是良序集. 显然，如果 A 是良序集，那么它的任何非空子集也是良序集. 在良序集中可以使用数学归纳法或超限归纳法，比如，要想证明命题"对任意的 $a \in A$，都有 $P(a)$ 成立"，可以采用如下步骤：

a) 对 A 的最小元素 a_0，证明 $P(a_0)$ 成立；

b) 对 A 中的任意元素 a，证明由 $\forall a' < a, P(a')$ 可以推出 $P(a)$.

则这样的两个步骤就实现了命题的证明. 因为，如果有某个 $a \in A$ 使得 $P(a)$ 不成立，那么 A 的子集 $A' = \{a \in A \,|\, \neg P(a)\}$ 就不是空集，所以根据 A 的良序性，知 A' 有最小元素，设为 a_1. 首先 $a_1 \neq a_0$ 因为 $P(a_0)$ 已经证明成立，因此 $a_0 < a_1$；其次任意比 a_1 小的元素都应使 P 成立因为 a_1 是使 P 不成立的最小元素；但根据归纳法第二条，这恰又能推出 $P(a_1)$ 成立，这个矛盾说明，对所有的 $a \in A$ 都有 $P(a)$ 成立. 在下面的证明中我们就要用这种方法.

命题 1.6.3. 设 Λ 是可数集合，$\{[a_\lambda, b_\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ 是一族互不相交的非空区间，且 $\bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} [a_\lambda, b_\lambda) = [a, b)$，那么

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} (b_\lambda - a_\lambda) = b - a$$

证明. 考虑在这个可数的区间族中再添加一个新元素 $[b, b+1)$，则区间族依然保持可数，并且 b 成为区间族中某个元素的左端点，这样我们只需要证明对所有的左端点 a_μ 与 a_λ，当 $a_\mu < a_\lambda$ 时都有

$$\sum_{\substack{\kappa\in\Lambda \\ a_\mu \leq a_\kappa < a_\lambda}} (b_\kappa - a_\kappa) = a_\lambda - a_\mu \tag{1.8}$$

然后取 $a_\mu = a, a_\lambda = b$，则命题得证.

对 a_λ 实行超限归纳法. 对于第一个左端点 $a_\mu = a$，以及大于 a 的第一个左端点 a_λ 来说，(1.8)显然成立. 假设(1.8)对所有满足 $a_\mu < a_{\lambda'} < a_\lambda$ 的 $a_\mu, a_{\lambda'}$ 都成立，往证当 $a_\mu < a_\lambda$ 时对 a_μ, a_λ 也成立. 根据引理1.6.2性质c)，可以讨论 a_λ 的两种情况：

a) 存在唯一的 $\lambda' \in \Lambda$ 使得 $b_{\lambda'} = a_\lambda$，则 $a_{\lambda'}$ 是小于 a_λ 的最大左端点，且由归纳假设，(1.8)对 $a_{\lambda'}$ 以及所有 $a_\mu < a_{\lambda'}$ 成立，因此对所有 $a_\mu < a_\lambda$，有

$$\begin{aligned} a_\lambda - a_\mu &= (b_{\lambda'} - a_{\lambda'}) + (a_{\lambda'} - a_\mu) \\ &= (b_{\lambda'} - a_{\lambda'}) + \sum_{a_\mu \leq a_\kappa < a_{\lambda'}} (b_\kappa - a_\kappa) \\ &= \sum_{a_\mu \leq a_\kappa < a_\lambda} (b_\kappa - a_\kappa) \end{aligned}$$

b) 存在一列严格单调递增的 a_{λ_n} 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\lambda_n} = a_\lambda$. 对于 $a_\mu < a_\lambda$，不妨设 $a_\mu = a_{\lambda_0}$，则由归纳假设，

$$\forall n \geq 1, a_{\lambda_n} - a_{\lambda_{n-1}} = \sum_{a_{\lambda_{n-1}} \leq a_\kappa < a_{\lambda_n}} (b_\kappa - a_\kappa)$$

则根据命题1.6.1，有

$$a_\lambda - a_\mu = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{\lambda_n} - a_{\lambda_{n-1}}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a_{\lambda_{n-1}}\le a_\kappa < a_{\lambda_n}}(b_\kappa - a_\kappa) = \sum_{a_\mu \le a_\kappa < a_\lambda}(b_\kappa - a_\kappa)$$

这样，由超限归纳原则，我们证明了式子(1.8)，也就证明了整个命题. □

注. 这个证明方法体现了关于长度的最原始思想：一些首尾相接的线段的总长度，等于把这些线段长度按顺序一个一个地加起来. 在 [3] 以及其它标准教材中，这个命题的证明用到了有限覆盖定理，事实上比这里的证明方法更简洁，适用范围也更广，同一种方法证明了 $\mathbb{R}^n$ 空间的相应命题. 但是笔者还是倾向于更加体现原始思想的证明，并且使读者对可数个正数的和有更深刻的认识. 至于 $\mathbb{R}^n$ 空间中的情形，本书后面有另外的方法.

参考文献

[1] F Cunningham. Taking limits under the integral sign. *Mathematics Magazine*, pages 179–186, 1967.

[2] Henri Lebesgue. Intégrale, longueur, aire. *Annali di matematica pura ed applicata*, 7(1):231–359, 1902.

[3] 徐森林. 实变函数论. 中国科学技术大学出版社, 2002.

[4] 李成章 and 黄玉民. 数学分析 (上册), 1999.

[5] 熊金城. 点集拓扑讲义. 高等教育出版社, 1998.

[6] 程其襄, 张奠宙, 魏国强, et al. 实变函数与泛函分析基础. 高等教育出版社, 2010.